Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2005/06**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert. [Je 2 Punkte]

$$\begin{aligned}
a_n =& n\left(\sqrt{1+2n+n^4}-\sqrt{3-n+n^4}\right),\\
b_n =& \left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{2n^3+3n^2+3}{n^2}-n\right)\right]^3,\\
c_n =& \left(1-\frac{1}{5n}\right)^{\frac{n}{2}},\\
d_n =& \frac{(-1)^n(n^2+2n)}{(2n+1)(2n-1)},\\
e_n =& \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{\sqrt{n^2+1}+\cos(n\pi)}{n+1}, \log(\frac{n}{n+2})\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.[3+3+4 Punkte]

$$\begin{aligned}
a_1 =& 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+1),\\
b_1 =& 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4b_n-1},\\
c_n =& ne^{-n} \qquad \text{Hinweis: l'Hospital ist noch unbekannt!!}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (Aufg. 2 Klausur 2004, leicht modifiziert)

Betrachten Sie die Folge t_n, $n \in \mathbb{N}_0$, die das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion $f(t) := t^2 + t - 6$ mit dem Startwert $t_0 = 3$ erzeugt. [3+2+3+2 Punkte]

a) Zeigen Sie, dass die Folge nach unten durch 2 beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert t^* der Folge und weisen Sie (unter Verwendung des Grenzwertes) die quadratische Konvergenz des Verfahrens nach. Beweisen Sie also die Gültigkeit der Ungleichung

$$|t_{n+1} - t^*| =\leq C|t_n - t^*|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei C eine geeignete Konstante ist.

d) Führen Sie fünf Schritte des Verfahrens durch.

Aufgabe 4:

Es sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fest vorgegeben und

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 + r^n}{2r^n + 1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge an.

[10 Punkte]

Abgabetermine: 12.12-15.12.2005 (zu Beginn der jeweiligen Übung)