Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2005/06**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1: Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden reellen Ausdrücke definiert? Welche Werte nimmt y an?

$$y = \frac{1}{\sqrt{(6 + x - x^2)}} \qquad y = \frac{1}{\log(x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$y = \sqrt{\cos\sqrt{x}} \qquad y = \arccos\left(\frac{\sqrt{25 - x^2}}{3}\right)$$

Zusatzaufgabe (freiwillig): Skizzieren Sie für die zugehörigen Funktionen $f : D \mapsto \mathbb{R},\ y = f(x)$, mit geeignetem Definitionsbereich D die Funktionsgraphen. Benutzen Sie dazu z.B. die Matlab-Befehle fplot oder linspace, sowie plot(x,y).

Aufgabe 2: Eine reellwertige Funktion heißt *gerade*, wenn auf ihrem Definitionsbereich $f(-x) = f(x)$ gilt. Sie heißt *ungerade*, wenn auf ihrem Definitionsbereich $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Welche der folgenden Funktionen sind gerade und welche sind ungerade?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + x^2}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x - \sin(x)$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$k : [-1; 1] \to \mathbb{R} \qquad k(x) = \frac{x \cdot g(x)}{f(x)}$$

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad l(x) = g(x)\,(f(x))^2 + x^3$$

Skizzieren Sie den Graphen von g für $x \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie, wenn möglich, für die folgenden Funktionen Minimum und Maximum der Bilder der angegebenen Definitionsbereiche.

$$g\ :\ [-3, 3] \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x)\ =\ x^2 - 4x + 29$$

$$h\ :\ (0, \pi) \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x)\ =\ \frac{1}{|\sin(x)|}$$

b) Bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für das Bild von $\mathbb{N}$ unter der Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

c) Sei $f(t)$ eine von t (z.B. Umgebungstemperatur oder Zeit) abhängige Größe, die nur näherungsweise berechnet werden kann. Der Ausdruck

$$R(t) = \left| \frac{(t-t_0)\cos\left(2(t-t_0)\right) - \left((t-t_0)^2+1\right)\sin(t-t_0)}{3!} (t-t_0)^3 \right|$$

sei eine obere Schranke für den Betrag des Approximationsfehlers. Zeigen Sie, dass mit $t_0 = 2$ die folgende Abschätzung gilt.

$$0 \leq R(t) \leq 0.002 \qquad \text{für alle } t \in [1.8\,,\, 2.2]$$

Aufgabe 4:

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \geq 3^n$? (Klausur 2002, Aufgabe 1c)

b) Sei k eine beliebige feste Zahl aus $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ die folgende Gleichung gilt.

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} \binom{j}{k} = \frac{1}{k} \binom{n}{k}$$

c) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung.

$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\,x^2 \qquad \forall x \in (0,1) \;\text{ und } \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) Fibonacci–Zahlen: Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann die Formel

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: es gilt $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4} = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Abgabetermine: 28.11-1.12.2005 (zu Beginn der jeweiligen Übung)