

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Auf eine Kreislinie sind die Zahlen von 1 bis 2010 in irgendeiner Reihenfolge geschrieben. Dabei werden die Zahlen im Uhrzeigersinn gesehen immer abwechselnd größer beziehungsweise kleiner. Zeige, dass es immer zwei benachbarte Zahlen mit gerader Differenz gibt.

Aufgabe 2 (4 P.). Ein Rechteck sei durch 10 horizontale und 10 vertikale Geraden in 121 rechteckige Zellen aufgeteilt, so dass 111 dieser Zellen einen ganzzahligen Umfang haben. Zeige, dass auch die restlichen 10 Zellen einen ganzzahligen Umfang haben.

Aufgabe 3 (5 P.). Ein ausgewachsener Wurm ist 1 Meter lang. Einen ausgewachsenen Wurm kann man in zwei Teile zerschneiden (mit beliebigem Längenverhältnis), so dass zwei neue Würmer entstehen. Beide Würmer wachsen nun sofort mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Stunde. Sobald ein Wurm eine Länge von 1 Meter erreicht hat, hört er zu wachsen auf und ist somit ausgewachsen. (Erst jetzt kann man ihn zerschneiden.) Wenn man mit einem einzigen ausgewachsenen Wurm beginnt, kann man nach weniger als einer Stunde 10 ausgewachsene Würmer haben?

Aufgabe 4 (5 P.). Es sei ein konvexes Viereck gegeben. Jede Diagonale zerteile es in zwei gleichschenklige Dreiecke, beide Diagonalen gemeinsam zerteilen es in vier gleichschenklige Dreiecke. Ist dieses Viereck zwangsläufig ein Quadrat?

Aufgabe 5. Ein Drache hält einen Ritter gefangen und hat ihm 100 Münzen gegeben, von denen die Hälfte magisch sind. (Der Ritter kann zwar die einzelnen Münzen voneinander unterscheiden, aber nur der Drache weiß, welche Münzen magisch sind.) Jeden Tag teilt der Ritter die Münzen in zwei Stapel auf (nicht unbedingt gleich große). Sollten dabei in beiden Stapeln gleich viele magische Münzen oder gleich viele gewöhnliche Münzen sein, wird der Drache den Ritter frei lassen. Kann der Ritter sicherstellen, nach höchstens

(a) (2 P.) 50 Tagen

(b) (3 P.) 25 Tagen

seine Freiheit zu erlangen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Die Seitenflächen eines konvexen Polyeders seien Dreiecke und alle zueinander ähnlich. Zeige, dass es zwei Paare kongruenter Seitenflächen gibt (zwei zueinander kongruente Seitenflächen und zwei weitere zueinander kongruente Seitenflächen).

Aufgabe 2 (4 P.). Ein ausgewachsener Wurm ist 1 Meter lang. Einen ausgewachsenen Wurm kann man in zwei Teile zerschneiden (mit beliebigem Längenverhältnis), so dass zwei neue Würmer entstehen. Beide Würmer wachsen nun sofort mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Stunde. Sobald ein Wurm eine Länge von 1 Meter erreicht hat, hört er zu wachsen auf und ist somit ausgewachsen. (Erst jetzt kann man ihn zerschneiden.) Wenn man mit einem einzigen ausgewachsenen Wurm beginnt, kann man nach weniger als einer Stunde 10 ausgewachsene Würmer haben?

Aufgabe 3 (4 P.). Entlang einer Kreislinie werden 100 weiße Steine platziert. Außerdem sei eine ganze Zahl k mit $1 \leq k \leq 50$ vorgegeben. In jedem Zug können wir nun k aufeinander folgende Steine auswählen, so dass der erste und letzte dieser Steine weiß sind, und diese beiden Steine schwarz anmalen. Für welche k kann man mit einigen dieser Züge alle 100 Steine schwarz anmalen?

Aufgabe 4 (5 P.). In einem konvexen Fünfeck zeichnen wir von jeder Ecke aus die Senkrechte zur jeweils gegenüberliegenden Seite. Zeige: Schneiden sich vier dieser Senkrechten in einem Punkt, dann verläuft auch die fünfte Senkrechte durch diesen Punkt.

Aufgabe 5 (5 P.). In einem Land gibt es 100 Städte und irgendeine Anzahl an Straßen. Jede Straße verbindet zwei Städte, wobei sich keine Straßen schneiden. Jede Stadt sei von jeder anderen Stadt aus entlang der Straßen erreichbar. Zeige, dass man einige Straßen zu Hauptstraßen erklären kann, so dass sich an jeder Stadt eine ungerade Anzahl von Hauptstraßen treffen.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!