Städtewettbewerb Herbst 2010 Lösungsvorschläge

Hamburg

10. November 2010 [Version 13. April 2011]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (4 P.). Es sei eine Gerade in der Ebene gegeben, außerdem hat man eine (kreisrunde) Münze zur Hand. Es sollen nun zwei Punkte konstruiert werden, deren Verbindungsgerade senkrecht zur vorgegebenen Geraden verläuft. Hierbei ist folgende Operation erlaubt: Man markiert einen oder zwei Punkte, legt die Münze so in die Ebene, dass der Punkt beziehungsweise die Punkte auf ihrem Rand liegen (sofern ihr Abstand kleiner ist als der Durchmesser der Münze), und zeichnet den Rand der Münze auf die Ebene. Es ist nicht möglich, die Münze so an die vorgegebene Gerade zu legen, dass die Gerade eine Tangente des Münzrandes bildet.

Lösung. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass die Gerade horizontal verläuft. Zunächst markieren wir drei Punkte auf der Geraden, so dass der Abstand vom mittleren Punkt zu jedem der beiden anderen Punkte kleiner als der Durchmesser der Münze ist. Mit Hilfe der Münze können wir zwei verschiedene Kreise durch den linken und den mittleren Punkt zeichnen, einen „oberen" und einen „unteren". Wir zeichnen beide ein und wiederholen den Vorgang für den mittleren und den rechten Punkt, siehe Abbildung 1.

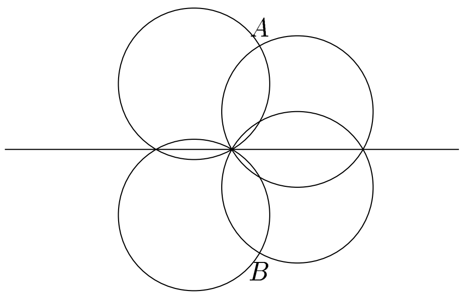

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.1.

Die beiden oberen Kreise schneiden sich im mittleren der drei markierten Punkte sowie in einem weiteren Punkt A. Die beiden unteren schneiden sich in einem weiteren Punkt B. Da die oberen Kreise die Spiegelung (an der vorgegebenen Geraden) der unteren Kreise sind, ist A die Spiegelung von B. Somit haben A und B die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Aufgabe M.2 (5 P.). Pete kann auf jeder beliebigen Strecke den Mittelpunkt markieren. Zudem kann er für jede positive ganze Zahl n einen Punkt markieren, der eine Strecke in zwei Teile mit dem Längenverhältnis $n : (n+1)$ teilt. Er behauptet, dass er dadurch die Strecke in jedes vorgegebene rationale Verhältnis teilen kann. Hat er Recht?

Lösung. Pete hat Recht. Dazu genügt es ihm, für jedes N die Strecke durch Markieren von $N-1$ Punkten in N gleichlange Teilstrecken unterteilen zu können: Für jedes rationale Verhältnis $p : q$ muss er die Strecke dann nur in $p+q$ Teilstrecken unterteilen; der p-te Punkt teilt die Strecke dann im Verhältnis $p : q$.

Um zu zeigen, dass Pete die Strecke wie behauptet in Teilstrecken unterteilen kann, gehen wir induktiv nach N vor. Für $N = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr (hier muss er überhaupt keinen Punkt markieren), für $N = 2$ ist sie nach Voraussetzung wahr.

Für $N \geq 3$ nehmen wir an, dass wir die Behauptung bereits für alle kleineren Anzahlen an Teilstrecken bewiesen haben, dass Pete also für jedes $n \leq N-1$ die Strecke in n gleichlange Teilstrecken teilen kann. Um zu zeigen, dass er sie auch in N gleichlange Teilstrecken zerlegen kann, unterscheiden wir zwei Fälle:

N **ist ungerade.** Schreiben wir $N = 2k+1$, $k \geq 1$. Nach Voraussetzung kann Pete die Strecke im Verhältnis $k : (k+1)$ aufteilen, er erhält also zwei Teilstrecken der Längen $\frac{k}{2k+1} = \frac{k}{N}$ beziehungsweise $\frac{k+1}{2k+1} = \frac{k+1}{N}$ der ursprünglichen Länge. Nach Induktionsannahme kann er die erste Teilstrecke in k und die zweite Teilstrecke in $k+1$ gleichlange Teilstrecken unterteilen, da sowohl k als auch $k+1$ kleiner als $N = 2k+1$ sind. Also hat er, wie gewünscht, die gesamte Strecke in N gleichlange Teilstrecken zerlegt.

N **ist gerade.** In diesem Fall halbiert Pete zunächst die Strecke und unterteilt dann jede der beiden Hälften in $\frac{N}{2}$ gleichlange Teilstrecken, was er nach Induktionsannahme kann. Auf diese Weise hat er wiederum die gesamte Strecke in N gleichlange Teilstrecken zerlegt. □

Aufgabe M.3 (8 P.)**.** Auf einer Rundstrecke starten 10 Radfahrer gleichzeitig vom gleichen Punkt aus in die gleiche Richtung. Jeder Radfahrer fährt ein konstantes Tempo, aber keine zwei fahren das gleiche Tempo. Befinden sich zu irgendeinem Zeitpunkt zwei Radfahrer wieder am gleichen Punkt, nennen wir dies eine *Begegnung*. Bis zum Mittag ist jeder Radfahrer jedem anderen mindestens einmal begegnet, aber niemals zweien oder mehr gleichzeitig. Zeige, dass jeder Radfahrer bis zum Mittag mindestens 25 Begegnungen hatte.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe O.2. □

Aufgabe M.4 (8 P.)**.** Ein Rechteck, das aus quadratischen Feldern besteht, ist in irgendeiner Weise in „Dominosteine“ unterteilt, also in Rechtecke von 1×2 Feldern. In jeden Dominostein wird eine Diagonale eingezeichnet. Hierbei dürfen keine zwei Diagonalen den gleichen Endpunkt haben. Zeige, dass dann stets genau zwei Ecken des Rechtecks Endpunkte von Diagonalen sind.

Lösung. Wir behaupten, dass die Diagonalen aller Dominosteine an den Kanten des Rechtecks gleich ausgerichtet sind, also alle von links unten nach rechts oben oder alle von links oben nach rechts unten. Daraus folgt dann direkt, dass genau zwei Ecken Endpunkte von Diagonalen sind, nämlich entweder die linke obere und die rechte untere Ecke oder die anderen beiden Ecken.

Angenommen, es gäbe an einer der Kanten des Rechtecks – ohne Einschränkung an der unteren Kante – unterschiedlich ausgerichtete Diagonalen. Dann gibt es zwei benachbarte Dominosteine mit unterschiedlich ausgerichteten Diagonalen. Es kann nicht sein, dass die Diagonale des linken Steins von links oben nach rechts unten verläuft, da die Diagonalen sonst einen Endpunkt gemeinsam hätten, siehe Abbildung 2.

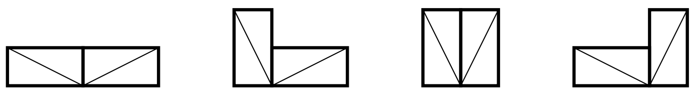

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Also verläuft die Diagonale des linken Dominosteins von links unten nach rechts oben. Es können nicht beide Steine horizontal oder beide vertikal ausgerichtet sein, siehe Abbildung 3.

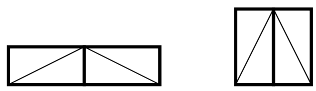

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Ohne Einschränkung sei der linke Stein horizontal ausgerichtet und der rechte vertikal. Der Dominostein, welcher in den „Winkel“ zwischen diesen beiden Steinen eingepasst ist, muss vertikal ausgerichtet sein und seine Diagonale muss von links unten nach rechts oben verlaufen, da seine Diagonale ansonsten immer einen Endpunkt mit einer der Diagonalen der beiden ersten Steine gemeinsam hätte (siehe Abbildung 4).

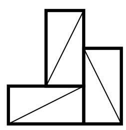

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

Entsprechend muss auch der Stein über dem rechten der ersten beiden Steine vertikal ausgerichtet sein und seine Diagonale muss von links oben nach rechts unten verlaufen. Dann muss aber auch der Stein über dem dritten Stein vertikal ausgerichtet sein und so weiter, siehe Abbildung 5.

Dies kann aber nicht sein, da spätestens, wenn einer der vertikalen Steine die obere Kante des Rechtecks erreicht, der Stein schräg darüber horizontal ausgerichtet sein muss. An dieser Stelle hätten dann also zwei Diagonalen einen gemeinsamen Endpunkt.

Also sind alle Diagonalen an einer Kante des Rechtecks – und somit alle Diagonalen am Rand – gleich ausgerichtet. Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen. □

Aufgabe M.5 (8 P.)**.** Es sei ein beliebiges Fünfeck gegeben. Für jede seiner Seiten teilen wir ihre Länge durch die Summe der Längen aller anderen Seiten

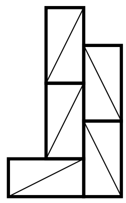

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4.

und summieren diese Verhältnisse auf. Zeige, dass die Summe stets kleiner als 2 ist.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe O.3. □

Aufgabe M.6 (8 P.). Im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ sei BH die Höhe über der Seite AC und P ein beliebiger Punkt auf BH. Außerdem sei A' der Mittelpunkt der Seite BC und C' der Mittelpunkt von AB. Die Senkrechten durch A' auf CP und durch C' auf AP schneiden sich im Punkt K. Zeige, dass $|KA| = |KC|$.

Lösung. Zusätzlich zu den in der Aufgabenstellung genannten Punkten definieren wir die folgenden Punkte (siehe Abbildung 6): Der Schnittpunkt von $A'C'$ und BH sei mit H' bezeichnet, der Mittelpunkt von BP sei P'. Vom Punkt K aus zeichnen wir eine Senkrechte auf $A'C'$. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit AC sei X, den mit $A'C'$ nennen wir Q. Schließlich bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $A'C'$ und BX mit X'.

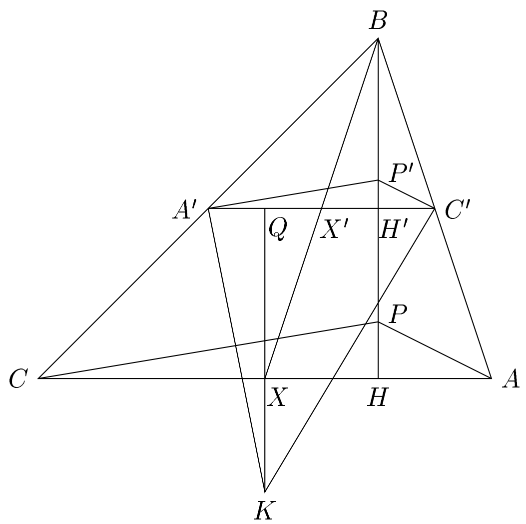

Abbildung 6: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.6.

Um $|KA| = |KC|$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass X der Mittelpunkt von AC ist, denn dann sind die Dreiecke $\triangle AKX$ und $\triangle CKX$ kongruent und somit ihre Hypotenusen KA und KC gleich lang. Nach dem Strahlensatz sind die Geraden AC und $A'C'$ parallel, also ist X genau dann der Mittelpunkt von AC, wenn X' der Mittelpunkt von $A'C'$ ist.

Ebenfalls nach dem Strahlensatz sind CP und $A'P'$ parallel, also KA' auch senkrecht zu $A'P'$. Die Dreiecke $\triangle KQA'$ und $\triangle A'H'P'$ sind ähnlich, denn beide haben einen rechten Winkel und wegen $\angle KA'Q = 90° - \angle H'A'P' = \angle A'P'H'$ sind auch die weiteren Winkel identisch. Wegen des Strahlensatzes sind $\triangle CHP$ und $\triangle A'H'P'$ ähnlich, also sind $\triangle CHP$ und $\triangle KQA'$ ähnlich. Dies bedeutet, dass $\frac{|KQ|}{|A'Q|} = \frac{|CH|}{|PH|}$, beziehungsweise

$$|KQ| \cdot |PH| = |A'Q| \cdot |CH| .$$

Die gleichen Argumente liefern, dass die Dreiecke $\triangle KC'Q$ und $\triangle APH$ ähnlich sind und somit

$$|KQ| \cdot |PH| = |C'Q| \cdot |AH|$$

gilt. Wir haben also $|A'Q| \cdot |CH| = |C'Q| \cdot |AH|$, beziehungsweise $\frac{|A'Q|}{|C'Q|} = \frac{|AH|}{|CH|}$. Da nach dem Strahlensatz $\frac{|AH|}{|CH|} = \frac{|C'H'|}{|A'H'|}$ gilt, folgt hieraus

$$\frac{|A'Q|}{|C'Q|} = \frac{|C'H'|}{|A'H'|}.$$

Also teilen Q und H' die Strecke $A'C'$ im gleichen Verhältnis und es gilt $|A'Q| = |C'H'|$. Da außerdem X' der Mittelpunkt von QH' ist, folgt hieraus $|A'X'| = |C'X'|$. Somit ist X' der Mittelpunkt von $A'C'$, also X der Mittelpunkt von AC und $|KA| = |KC|$ wie gewünscht. □

Aufgabe M.7 (12 P.)**.** An einem runden Tisch halten N Ritter ihre täglichen Versammlungen ab. Der Zauberer Merlin bestimmt dabei ihre Reihenfolge. Vom zweiten Tag an dürfen die Ritter ihre Reihenfolge während der Versammlung wie folgt verändern (beliebig oft): Zwei Sitznachbarn dürfen ihre Plätze tauschen, falls sie am ersten Tag keine Nachbarn waren. Die Ritter versuchen, eine Reihenfolge zu erreichen, welche bereits an einem früheren Tag auftrat. Wie viele Tage kann Merlin maximal erzwingen, dass dies nicht geschieht?

(Zwei Reihenfolgen am Tisch werden als gleich angesehen, wenn sie durch eine Drehung des Tisches ineinander überführbar sind. Merlin sitzt nicht mit am Tisch.)

LÖSUNG. Spätestens am Tag N können die Ritter eine bereits aufgetretene Reihenfolge erreichen. (Ausnahme ist hier der Fall $N = 1$, in dem es offensichtlich bis zum zweiten Tag dauert. In diesem Fall kann man aber kaum von „Versammlung“ sprechen.) Bei optimalem Vorgehen von Merlin können sie es auch nicht früher erreichen.

Zunächst betrachten wir die Reihenfolge am ersten Tag und nummerieren die Ritter im Uhrzeigersinn von 1 bis N durch. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass $N \geq 2$. Aus einer beliebigen Reihenfolge am Tisch errechnen wir uns eine Zahl wie folgt: Wir beginnen bei Ritter 1 und zählen so lange die Plätze im Uhrzeigersinn weiter, bis wir bei Ritter 2 ankommen. Dann zählen wir weiter, bis wir bei Ritter 3 ankommen und so weiter. Wenn wir bei Ritter N angekommen sind, zählen wir noch einmal weiter bis zu Ritter 1. Da wir dabei wieder am Ausgangspunkt angekommen sind, haben wir den Tisch beim Zählen eine bestimmte Anzahl an Malen umrundet. Ist k diese Anzahl, dann sagen wir, die Reihenfolge ist *k-fach gestreckt.* Hierbei muss das k zwischen 1 und $N-1$ liegen: Einmal umrunden wir den Tisch mindestens, andererseits umrunden wir ihn während des Zählens von einem Ritter zum nächsten weniger als einmal, also insgesamt weniger als N mal. Bei Streckung 1 ist die Reihenfolge offensichtlich wie am ersten Tag, bei Streckung $N-1$ ist sie genau umgekehrt.

Tauschen nun zwei Ritter gemäß den Regeln den Platz, dann ändert sich die Streckung der Reihenfolge nicht: Für den einen der beiden Ritter wird der Abstand zum Vorgänger (in der Nummerierung) um 1 kleiner und der Abstand zum Nachfolger um 1 größer. Für den anderen ist es umgekehrt. Insgesamt ändert sich die Anzahl der Schritte also nicht, die wir für die Streckung zählen müssen. (Dürften zwei Ritter den Platz tauschen, die am Vortag benachbart waren, gälte dies nicht, denn dann veränderte sich ihr Abstand von 1 zu $N-1$ oder umgekehrt.) Egal, was die Ritter machen, sie können die Streckung der Reihenfolge nicht ändern.

Wir behaupten, dass es für jedes k von 1 bis $N-1$ eine k-fach gestreckte Reihenfolge gibt. Wenn Merlin also am Tag k (mit k von 2 bis $N-1$) eine k-fach gestreckte Reihenfolge vorgibt, können die Ritter daraus nur eine andere k-fach gestreckte Reihenfolge erreichen, also keine bereits vorgekommene. Somit dauert es mindestens bis zum N-ten Tag. Eine k-fach gestreckte Reihenfolge ist zum Beispiel wie folgt gegeben: Merlin platziert die Ritter 1 bis $N-k$ im Uhrzeigersinn nebeneinander um den Tisch, daneben die Ritter N absteigend bis $N-k+1$ (also etwa $1, 2, 3, 4, 7, 6, 5$ für $N=7$ und $k=3$). Dass diese Reihenfolge k-fach gestreckt ist, rechnet man leicht nach. Die Ritter erreichen also frühestens am Tag N ihr Ziel.

Außerdem behaupten wir, dass die Ritter je zwei k-fach gestreckte Reihenfolgen ineinander überführen können. Da spätestens am Tag N eine Streckung ein zweites Mal auftreten muss, kann Merlin das Wiederholen einer Reihenfolge also nicht länger verhindern. Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir, dass sich jede k-fach gestreckte Reihenfolge in die oben beschriebene Reihenfolge überführen lässt (und umgekehrt, da wir alle Vertauschungen von Plätzen auch umgekehrt machen können).

Sei also eine k-fach gestreckte Reihenfolge gegeben. Für $k=1$ und $k=N-1$ ist es offensichtlich, dass es nur eine solche Reihenfolge gibt, wir können daher $2 \leq k \leq N-2$ annehmen. Unter allen Reihenfolgen, welche die Ritter daraus erreichen können, wählen wir diejenige, welche die längste Reihe der Form $1, 2, \ldots, m$ (im Uhrzeigersinn direkt aufeinander folgend) aufweist. Hierfür muss $m \leq N-k < N-1$ gelten, da eine solche Reihenfolge höchstens $(N-m)$-fach gestreckt sein kann. (Bis zum Ritter m haben wir noch keine vollständige Umrundung und mit den verbleibenden $N-m$ Schritten können wir höchstens noch $N-m$ Umrundungen erreichen.) Da wir diese Reihe nicht durch erlaubte Vertauschungen verlängern können, kommt auf den weiteren Plätzen der Ritter $m+1$ erst nach dem Ritter $m+2$, denn ansonsten könnte Ritter $m+1$ mit allen vor ihm sitzenden Rittern die Plätze tauschen und so die Reihe $1, 2, \ldots, m$ um einen verlängern. Falls $m+2$ kleiner als N ist, muss auch der Ritter $m+3$ vor dem Ritter $m+2$ sitzen, denn ansonsten könnte Ritter $m+2$ mit allen vor ihm sitzenden Rittern – inklusive den Rittern m bis 1 – die Plätze tauschen und so den Weg für Ritter $m+1$ „frei machen“. Das gleiche Argument gilt auch für die Ritter $m+3$ und $m+4$ (solange $m+3$ kleiner als N ist) und so weiter. Also ist diese Reihenfolge genau die oben beschriebene: Zuerst die Ritter $1, 2, \ldots, m$, dann die Ritter N absteigend bis $m+1$.

Dies beweist, dass die Ritter spätestens – und, wie zuvor gezeigt, frühestens – am Tag N ihr Ziel erreichen. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1. In einem Land gebe es genau 100 Städte, die als Punkte in der Ebene aufgefasst werden. In einem Buch ist zu je zwei Städten ihre Entfernung zueinander eingetragen (insgesamt 4950 Einträge).

(a) (2 P.) Irgendein Eintrag wurde entfernt. Ist es stets möglich, ihn anhand der anderen Einträge zu rekonstruieren?

(b) (3 P.) Angenommen, es wurden k Einträge gelöscht und keine drei Städte im Land liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Welches ist das größte k, für das man die fehlenden Einträge in jedem Fall rekonstruieren kann?

LÖSUNG. (a) Nein, das ist nicht immer möglich. Angenommen, alle anderen Städte außer den beiden, deren Entfernung gelöscht wurde, liegen auf einer Geraden, die diese beiden Städte nicht enthält. Dann lässt sich nicht ermitteln, ob die beiden Städte auf derselben Seite von der Geraden liegen oder nicht. Falls die beiden Städte auf derselben Seite der Geraden liegen, ist die Entfernung zwischen ihnen kürzer, als wenn eine der beiden Städte durch ihr Spiegelbild an der Geraden ersetzt wird.

(b) Das größte solche k ist 96: Wenn 97 Einträge gelöscht werden, die alle zu derselben Stadt gehören, wären alle bekannten Einträge gleich, wenn diese Stadt durch ihr Spiegelbild an der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Städten ersetzt würde, zu denen ihre Entfernungen noch bekannt sind. Dabei verändern sich aber die gelöschten Einträge, also können wir sie nicht rekonstruieren. (Wir dürfen annehmen, dass sich auf dem Spiegelbild keine andere Stadt befindet. Dazu kann man die Einträge zum Beispiel so löschen, dass die Verbindungsstrecke der Städte am Rand liegt, wenn man die *konvexe Hülle* aller Städte betrachtet. Das ist die konvexe Fläche, die alle Städte enthält und von Verbindungsstrecken der Städte begrenzt wird.)

Falls nur 96 Einträge gelöscht werden, lassen sich stets alle anderen Einträge ermitteln: Zu zwei Städten, deren Entfernung bekannt ist, lässt sich eine dritte Stadt mit bekannten Entfernungen zu den beiden Städten finden. Andernfalls wäre für alle anderen 98 Städte die Entfernung zu einer dieser beiden Städte gelöscht worden, das sind mehr als 96 Einträge. Nun können schrittweise alle fehlenden Einträge rekonstruiert werden, dazu geht man in jedem Schritt davon aus, dass es k Städte gibt mit $3 \leq k \leq 99$, zwischen denen man alle Entfernungen kennt (eventuell dadurch, dass sie in einem früheren Schritt ermittelt wurden). Dann gibt es eine weitere Stadt, deren Entfernungen zu mindestens 3 dieser k Städte bekannt sind: Andernfalls wären mindestens $(100-k)(k-2)$ Einträge gelöscht worden, es gilt aber

$$\begin{aligned}(100-k)(k-2) &= -k^2+102k-200 = -(k-51)^2+51^2-200 \\ &\geq -48^2+51^2-200 = 3\cdot 99-200 = 97.\end{aligned}$$

S sei eine solche Stadt. Für jede Stadt A der k Städte lässt sich die Entfernung zu S ermitteln: Falls die Entfernung noch nicht bekannt ist, gibt es zumindest 3 Städte, von denen jeweils die Entfernungen zu A und S bekannt sind. Wählt man zwei von diesen Städten, so kann man aus den Entfernungen von A und S zu diesen Städten die Entfernung zwischen A und S ermitteln, falls zusätzlich bekannt ist, ob A und S sich auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Verbindungsgeraden g zwischen den beiden Städten befinden. Aus den Entfernungen zur dritten Stadt kann ermittelt werden, ob A beziehungsweise S und die dritte Stadt sich auf derselben Seite von g befinden, insbesondere ergibt sich, ob A und S auf der selben Seite sind. Daher gibt es nun $k+1$ Städte (die k Städte und S) zwischen denen paarweise alle Entfernungen bekannt sind. Also lassen sich schrittweise alle fehlenden Einträge rekonstruieren. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** Auf einer Rundstrecke starten $2N$ Radfahrer gleichzeitig vom gleichen Punkt aus in die gleiche Richtung. Jeder Radfahrer fährt ein konstantes Tempo, aber keine zwei fahren das gleiche Tempo. Befinden sich zu irgendeinem Zeitpunkt zwei Radfahrer wieder am gleichen Punkt, nennen wir dies eine *Begegnung*. Bis zum Mittag ist jeder Radfahrer jedem anderen mindestens einmal begegnet, aber niemals zweien oder mehr gleichzeitig. Zeige, dass jeder Radfahrer bis zum Mittag mindestens N^2 Begegnungen hatte.

LÖSUNG. Wir nummerieren die Radfahrer nach ihrer Geschwindigkeit: Fahrer 1 ist der Langsamste, Fahrer $2N$ der Schnellste. Bis zum Mittag ist der Fahrer k (mit k zwischen 2 und $2N$) dem Fahrer $k-1$ mindestens einmal begegnet. Also hat er ihn mindestens einmal überrundet und ist somit mindestens eine Runde mehr gefahren. Deshalb hat für $k > l$ der Fahrer k mindestens $k-l$ Runden mehr zurückgelegt als Fahrer l, sie sind sich demnach mindestens $k-l$ mal begegnet. Betrachten wir nun den Fahrer k, dann ist dieser den $k-1$ langsameren Fahrern jeweils mindestens $1, 2, \ldots, k-1$ mal begegnet, insgesamt macht dies mindestens $\frac{k(k-1)}{2}$ Begegnungen. Den $2N-k$ schnelleren Fahrern ist er jeweils mindestens $1, 2, \ldots, 2N-k$ mal begegnet, das macht insgesamt mindestens $\frac{(2N-k)(2N-k+1)}{2}$. Zusammen hatte er also mindestens

$$\begin{aligned}\frac{(2N-k)(2N-k+1)+k(k-1)}{2} &= \frac{(2N-k)^2+2N-k+k^2-k}{2}\\ &= \frac{4N^2-4Nk+2N+2k^2-2k}{2}\\ &= 2N^2-2Nk+k^2+N-k\\ &= N^2+(N-k)^2+(N-k) \geq N^2\end{aligned}$$

Begegnungen, da $(N-k)^2+(N-k) \geq 0$. Diese letzte Behauptung folgt aus $(N-k)^2+(N-k) = (N-k)(N-k+1)$ und der Tatsache, dass von zwei aufeinander folgenden Zahlen nicht eine positiv und eine negativ sein kann, also ihr Produkt nie negativ ist. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Es sei ein beliebiges Vieleck gegeben. Für jede seiner Seiten teilen wir seine Länge durch die Summe der Längen aller anderen Seiten und summieren diese Verhältnisse auf. Zeige, dass die Summe stets kleiner als 2 ist.

LÖSUNG. Die Seitenlängen des Polygons seien mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$ nach Dreiecksungleichung $a_i < \sum_{j \neq i} a_j$, woraus $\sum_{j=1}^{n} a_j < 2 \sum_{j \neq i} a_j$ und damit

$$\frac{a_i}{\sum_{j \neq i} a_j} < 2 \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j}$$

folgt. Indem wir diese Ungleichungen für $i = 1, \ldots, n$ aufsummieren, folgt die Behauptung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j \neq i} a_j} < 2.$$

□

Aufgabe O.4. Zwei Zauberer duellieren sich. Zu Beginn fliegen sie in einer Höhe von 100 über dem Meer. Dann wenden sie abwechselnd Zaubersprüche an, wobei jeder Spruch die eigene Höhe um a und die des Gegners um b verringert, mit positiven reellen Zahlen $a < b$ (für jeden Spruch verschieden). Beide Zauberer kennen die gleichen Zaubersprüche und können jeden beliebig oft anwenden. Ein Zauberer gewinnt, wenn er sich irgendwann in einer positiven Höhe befindet, sein Gegner aber nicht. Gibt es eine Menge an bekannten Zaubersprüchen, für die der zweite Zauberer seinen Sieg erzwingen kann und die

(a) (2 P.) endlich ist;

(b) (5 P.) unendlich ist?

LÖSUNG. (a) Es gibt keine solche Menge, denn bei jeder beliebigen endlichen Menge an Zaubersprüchen kann der erste Zauberer stets den Spruch mit der größten Differenz $b - a$ anwenden. In diesem Fall kann der zweite Zauberer die Höhendifferenz zwischen ihnen bestenfalls ausgleichen, er wird sich aber niemals höher als der erste Zauberer befinden. Daher kann er auch nicht gewinnen.

(b) Es gibt eine solche Menge: Der n-te Zauberspruch ($n = 1, 2, \ldots$) habe die Auswirkungen $a = \frac{100}{n+2}$ und $b = 100 - a$. Offenbar ist hier stets $0 < a < b$. Wendet der erste Zauberer den n-ten Spruch an, kann der zweite Zauberer den $(n+1)$-ten (oder einen noch späteren) Spruch anwenden. Danach befindet er sich in der Höhe

$$100 - \left(100 - \frac{100}{n+2}\right) - \frac{100}{n+3} = 100\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) > 0,$$

während sich der erste Zauberer in der Höhe

$$100 - \frac{100}{n+2} - \left(100 - \frac{100}{n+3}\right) = 100\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right) < 0$$

befindet. Also hat der zweite Zauberer gewonnen. □

Aufgabe O.5 (8 P.). Das Viereck $ABCD$ sei in einen Kreis mit Mittelpunkt O einbeschrieben, so dass seine Diagonalen nicht durch O verlaufen. Der Umkreismittelpunkt von $\triangle AOC$ liege auf der Geraden durch B und D. Zeige, dass dann der Umkreismittelpunkt von $\triangle BOD$ auf der Geraden durch A und C liegt.

Lösung. Wir betrachten die Inversion am Kreis durch A, B, C und D. Diese bildet den Umkreis des Dreiecks AOC und die Gerade AC sowie den Umkreis des Dreiecks BOD und die Gerade BD jeweils aufeinander ab. Nach Voraussetzung stehen die Gerade BD und der Umkreis des Dreiecks AOC aufeinander senkrecht. Also stehen auch die entsprechenden Bilder, das heißt der Umkreis des Dreiecks BOD und die Gerade AC aufeinander senkrecht. Dies bedeutet, dass der Umkreismittelpunkt von $\triangle BOD$ auf der Geraden durch A und C liegt. $\square$

Alternative Lösung. Es sei P der Umkreismittelpunkt von $\triangle AOC$. Der Schnittpunkt von AC mit der Geraden durch O und P sei X, die Senkrechte auf BD durch O treffe BD in Y und die Gerade durch A und C in Q (siehe Abbildung 7). Wir behaupten, dass Q der Umkreismittelpunkt von $\triangle BOD$ ist.

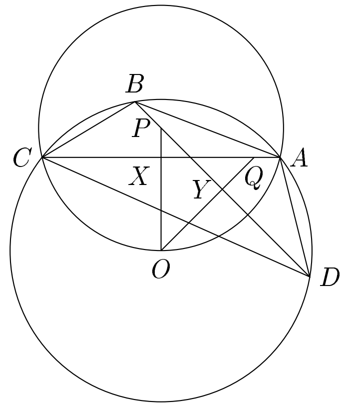

Abbildung 7: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

Da O der Umkreismittelpunkt von $ABCD$ ist, sind die Dreiecke $\triangle AOC$ und $\triangle BOD$ gleichschenklig. Hieraus folgt, dass X der Mittelpunkt von AC und Y der Mittelpunkt von BD ist. Außerdem ist $|QB| = |QD|$. Es bleibt zu zeigen, dass $|QO| = |QB|$. Dies zeigen wir durch mehrfache Anwendung des Satzes von

Pythagoras:

$$\begin{aligned}
|QB|^2 &= |QY|^2 + |YB|^2 \\
&= |QY|^2 + \left(|OB|^2 - |OY|^2\right) \\
&= |QY|^2 + |OA|^2 - |OY|^2 \\
&= |QY|^2 + |OA|^2 - \left(|OP|^2 - |PY|^2\right) \\
&= |OA|^2 + \left(|QY|^2 + |PY|^2\right) - |OP|^2 \\
&= |OA|^2 + |PQ|^2 - |AP|^2 \\
&= |OA|^2 + \left(|PX|^2 + |QX|^2\right) - |AP|^2 \\
&= |QX|^2 + |OA|^2 - \left(|AP|^2 - |PX|^2\right) \\
&= |QX|^2 + |OA|^2 - |AX|^2 \\
&= |QX|^2 + |OX|^2 \\
&= |QO|^2 .
\end{aligned}$$

(Hierbei haben wir im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile die Gleichheit $|OA| = |OB|$ verwendet.) □

Aufgabe O.6 (12 P.)**.** Die Einträge einer Tabelle der Größe 1000×1000 seien Einsen und Nullen. Zeige, dass man stets 990 Zeilen löschen kann, so dass in jeder Spalte mindestens eine Eins verbleibt, oder 990 Spalten, so dass in jeder Zeile mindestens eine Null verbleibt.

Lösung. In jeder $n \times m$-Tabelle mit Nullen und Einsen als Einträge gibt es eine Zeile, in der mindestens die Hälfte aller Einträge eine 1 ist, oder eine Spalte, in der mindestens die Hälfte alle Einträge eine 0 ist: Andernfalls wäre in jeder Spalte weniger als die Hälfte aller Eintrage eine 1, also wäre weniger als die Hälfte aller Eintrage der Tabelle eine 1, ebenso wäre aber auch weniger als die Hälfte aller Einträge der Tabelle eine 0.

Wir wollen nun höchstens 10 Zeilen der Tabelle auswählen, die in jeder Spalte mindestens eine 1 enthalten oder höchstens 10 Spalten, die in jeder Zeile mindestens eine 0 enthalten. Dazu wählen wir, falls das möglich ist, eine Zeile, in der mindestens die Hälfte aller Einträge Einsen sind. Anschließend streichen wir alle Spalten, in denen diese Zeile Einsen enthält. Im nächsten Schritt wählen wir, falls das möglich ist, eine Zeile, von der in der verbliebenen Tabelle mindestens in der Hälfte aller Einträge Einsen sind. Anschließend streichen wir wieder alle (noch verbliebenen) Spalten, in denen diese Zeile Einsen enthält. Auf diese Weise fahren wir fort, bis wir alle Spalten gestrichen haben oder bis wir keine solche Zeile mehr finden. Da wir jeweils mindestens die Hälfte der verbleibenden Spalten streichen und da $1000 < 2^{10}$ ist, tritt, spätestens nachdem wir die zehnte Zeile gewählt haben, einer dieser beiden Fälle ein. Im ersten Fall haben wir alle Spalten gestrichen, also enthält jede Spalte in mindestens einer der gewählten Zeilen eine 1.

Im zweiten Fall gibt es in der noch verbliebenen Tabelle eine Spalte, in der mindestens die Hälfte aller Einträge Nullen sind. Wir wählen eine solche Spalte und streichen alle Zeilen, in denen diese Spalte eine 0 enthält. Da es in der verbliebenen Tabelle keine Zeile gibt, in der mindestens die Hälfte aller Einträge Einsen sind (erst recht nicht, nachdem noch weitere Zeilen gestrichen wurden), gibt es in jedem Schritt wieder eine Spalte, die in mindestens der Hälfte der verbliebenen Zeilen Nullen enthält. Wir können also auf diese Weise fortfahren, bis alle Zeilen gestrichen sind. Dann haben wir höchstens 10 Spalten gewählt, die in jeder Zeile mindestens eine 0 enthalten. □

Aufgabe O.7 (14 P.)**.** Das Quadrat $ABCD$ sei in kongruente Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen unterteilt. Die Figur F umfasse genau diejenigen Rechtecke, welche die Diagonale AC treffen. Zeige, dass diese Diagonale die Fläche von F halbiert.

Lösung. Da die Rechtecke ganzzahlige Seitenlängen haben, sind auch die Seiten des Quadrates $ABCD$ ganzzahlig und wenn man $ABCD$ in 1×1-Quadrate zerlegt, besteht jedes dieser Rechtecke aus einigen dieser 1×1-Quadrate.

Ohne Einschränkung sei A links oben und C rechts unten. In der Zerlegung von $ABCD$ in 1×1-Quadrate betrachten wir diagonale Reihen von Quadraten, die unterhalb von AC liegen oder von AC geschnitten werden, dabei besteht eine diagonale Reihe jeweils aus allen Quadraten, deren Diagonalen von links oben nach rechts unten auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Diese diagonalen Reihen nummerieren wir so durch, dass die Nummer einer Reihe mit der Anzahl von Quadraten dieser Reihe übereinstimmt. In Abbildung 8 steht in den Quadraten einer Reihe die Reihennummer.

6					
5	6				
4	5	6			
3	4	5	6		
2	3	4	5	6	
1	2	3	4	5	6

Abbildung 8: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.7.

Für jeweils die l-te Reihe bezeichnen wir mit $E(l)$ die Anzahl der Rechtecke, bei denen das Quadrat an der linken unteren Ecke des Rechtecks in der l-ten Reihe liegt. Wir behaupten, dass $E(l)$ nur von den Seitenlängen der kongruenten Rechtecke abhängt und nicht davon, wie diese in der Unterteilung von $ABCD$ angeordnet sind. (Im Folgenden ist mit „Rechteck“ immer eines der kongruenten Rechtecke gemeint, deren Seitenlängen bekannt sind.)

Wir nehmen an, wir hätten diese Behauptung schon für alle kleineren Nummern als l gezeigt und folgern daraus, dass sie auch für l gilt: Die Anzahl der Quadrate aus der l-ten Reihe, die von einem Rechteck überdeckt werden, hängt nur davon ab, zu welcher Reihe das Quadrat an der linken unteren Ecke des Rechtecks gehört. Zudem überdeckt das Rechteck kein Quadrat der l-ten Reihe, falls sein linkes unters Quadrat in einer Reihe mit einer größeren Nummer als l liegt. Wenn $E(k)$ für alle $k < l$ bekannt ist, lässt sich daraus also ermitteln, wie viele Quadrate der l-ten Reihe von Rechtecken überdeckt werden, deren linkes unteres Quadrat nicht in der l-ten Reihe liegt. Diese Zahl sei mit $A(l)$ bezeichnet. Alle übrigen Quadrate der l-ten Reihe werden daher von Rechtecken überdeckt,

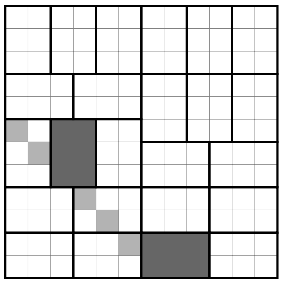

Abbildung 9: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.7. In diesem Beispiel ist E(7)=2.

deren linkes unteres Quadrat in der l-ten Reihe liegt. Da solche Rechtecke genau ein Feld der l-ten Reihe überdecken, ist $E(l) = l - A(l)$.

Für $l = 1$ ist die Behauptung richtig, es gilt immer $E(1) = 1$. Daraus folgt die Behauptung für $l = 2$. Aus den Fällen $l = 1$ und $l = 2$ lässt sich der Fall $l = 3$ folgern und so weiter, daher gilt die Behauptung jede der diagonalen Reihen.

Ob ein Rechteck die Diagonale AC trifft und wie viel Fläche unterhalb der Diagonalen AC es überdeckt, hängt nur davon ab, in welcher diagonalen Reihe sein linkes unteres Quadrat liegt. Also lässt sich aus den Zahlen $E(l)$ ermitteln, wie groß die Fläche von F ist, die unter der Diagonalen AC liegt. Damit ist auch die Größe dieser Fläche unabhängig von der Anordnung der Rechtecke. Wenn eine gegebene Anordnung an der Diagonalen AC gespiegelt wird, stimmen also die Größen der Flächen von F unter der Diagonalen AC und der Spiegelung von F unter der Diagonalen AC überein, das heißt, die Fläche F wird von der Diagonalen AC halbiert. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Prof. Dr. Helmut Müller, Jens Reinhold, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.