

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). In sechs Körben befinden sich Äpfel, Birnen und Pflaumen. In jedem Korb liegen genau so viele Pflaumen wie insgesamt in allen anderen Körben Äpfel enthalten sind. Außerdem liegen in jedem Korb genau so viele Äpfel wie insgesamt in allen anderen Körben Birnen enthalten sind. Zeige, dass die Gesamtanzahl an Früchten durch 31 teilbar ist.

Aufgabe 2 (3 P.). Karlsson und Lillebror teilen einen quadratischen Kuchen wie folgt untereinander auf: Zuerst bestimmt Karlsson einen Punkt auf dem Kuchen (nicht auf dem Rand). Dann schneidet Lillebror von diesem Punkt aus in eine beliebige Richtung mit einem geraden Schnitt zum Rand des Kuchens. Nun schneidet Karlsson ebenfalls vom gewählten Punkt aus mit einem geraden Schnitt bis zum Rand. Zusätzlich muss dieser Schnitt senkrecht zu dem von Lillebror getätigten Schnitt verlaufen. Der Kuchen ist nun in zwei Stücke zerteilt, von denen Lillebror das kleinere Stück bekommt. Lillebror möchte mindestens ein Viertel des Kuchens bekommen. Kann Karlsson dies verhindern?

Aufgabe 3. In die Ebene sei ein Winkel gezeichnet. Im Folgenden darf lediglich ein Zirkel verwendet werden.

- (a) (2 P.) Man soll herausfinden, ob der Winkel spitz ist. Finde die kleinste Anzahl von Kreisen, die man zeichnen muss, um dieses in jedem Fall feststellen zu können.
- (b) (2 P.) Wie kann man herausfinden, ob der Winkel genau 31° groß ist? (Die Anzahl der hierfür gezeichneten Kreise darf beliebig groß sein.)

Aufgabe 4 (5 P.). Bei einem Mathematik-Wettbewerb ist jeder Teilnehmer mit mindestens dreien der anderen befreundet. Zeige, dass man immer eine gerade Anzahl (mehr als zwei) an Teilnehmern finden und so um einen Tisch platzieren kann, dass jeder am Tisch zwei seiner Freunde als Nachbarn hat.

Aufgabe 5 (5 P.). Auf einer Tafel stehen die 101 Zahlen $1^2, 2^2, \dots, 101^2$. Man darf nun zwei Zahlen an der Tafel auswischen und ihre (nichtnegative) Differenz an die Tafel schreiben. Welches ist die kleinste Zahl, die nach 100 dieser Schritte an der Tafel stehen kann?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Auf 2010 Schiffen werden Ananas, Bananen und Zitronen von Südamerika nach Russland transportiert. Auf jedem Schiff befinden sich genau so viele Bananen wie insgesamt von allen anderen Schiffen Zitronen transportiert werden. Außerdem befinden sich auf jedem Schiff genau so viele Zitronen wie insgesamt von allen anderen Schiffen Ananas transportiert werden. Zeige, dass die Gesamtanzahl an Früchten durch 31 teilbar ist.

Aufgabe 2 (4 P.). Eine Funktion $f(x)$ besitzt die folgende Eigenschaft: Jede Gerade in der xy -Ebene schneidet den Funktionsgraphen $y = f(x)$ ebenso oft wie sie die Parabel $y = x^2$ schneidet. Zeige, dass $f(x) = x^2$.

Aufgabe 3 (5 P.). Kann man die Oberfläche eines regelmäßigen Oktaeders ohne Lücken und Überlappungen durch (endlich viele) regelmäßige Sechsecke überdecken? (Ein regelmäßiges Oktaeder hat 6 Ecken, alle Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke und jede Ecke liegt auf 4 Seitenflächen.)

Aufgabe 4 (5 P.). Baron Münchhausen fordert dich auf, ein nicht konstantes Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen nichtnegativen Koeffizienten zu wählen und ihm die Werte $P(2)$ und $P(P(2))$ mitzuteilen. Er behauptet, aus diesen zwei Werten stets das Polynom bestimmen zu können. Lügt der Baron?

Aufgabe 5 (6 P.). Eine Nadel liegt in der Ebene. Man darf sie nun um einen ihrer Endpunkte um 45° drehen. Ist es möglich, dass die Nadel nach einigen dieser Rotationen – wobei der Endpunkt, um den gedreht wird, bei jeder Rotation neu gewählt werden darf – wieder exakt ihre ursprüngliche Position einnimmt, ihre Endpunkte aber vertauscht sind? (Die Nadel darf als Strecke angesehen werden.)

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!