Städtewettbewerb Frühjahr 2008
Lösungsvorschläge

Hamburg

5. März 2008 [Version 7. April 2008]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.)**.** Die gegenüberliegenden Seiten eines konvexen Sechsecks $ABCDEF$ seien jeweils parallel (also $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$). Außerdem sei $|AB| = |DE|$. Beweise, dass $|BC| = |EF|$ und $|CD| = |FA|$.

Lösung. Da $AB \parallel DE$ und $|AB| = |DE|$, ist $ABDE$ ein Parallelogramm (siehe Abbildung 1).

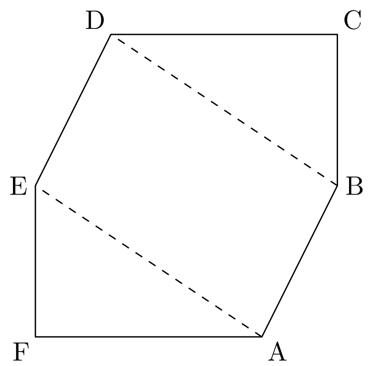


Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.1.

Also ist $|BD| = |AE|$. Da wegen $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$ in den Dreiecken ΔBCD und ΔEFA zusätzlich noch die Winkel an den gleich langen Seiten BD und AE übereinstimmen, sind die Dreiecke kongruent. Also ist auch $|BC| = |EF|$ und $|CD| = |FA|$. □

Aufgabe M.2 (5 P.)**.** In der Ebene seien zehn gleich lange Strecken gegeben. Jeder ihrer Schnittpunkte teile alle Strecken, auf denen er liegt, im Verhältnis 3 zu 4. Ermittle die maximal mögliche Anzahl an Schnittpunkten.

Lösung. Mehr als zehn Punkte können nicht existieren, da es auf jeder Strecke nur zwei Punkte im entsprechenden Verhältnis gibt und jeweils mindestens zwei Strecken sich in einem solchen Punkt schneiden.

Zehn Punkte sind möglich, siehe Abbildung 2.

□

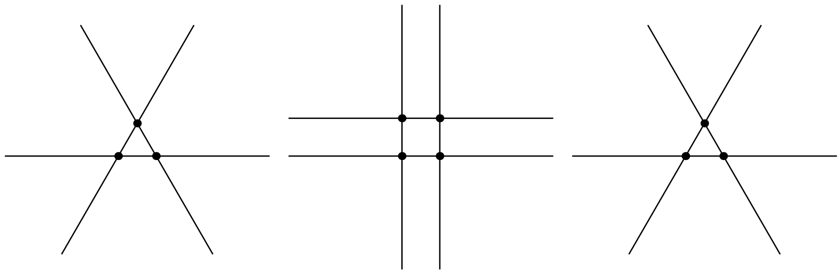


Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.2.

Bemerkung. Man kann zehn Schnittpunkte *nicht* erreichen, indem man die Geraden zu einem Zehneck (mit verlängerten Kanten) anordnet, da hierbei stets weitere Schnittpunkte entstehen. Dies liegt daran, dass auf jeder Strecke die beiden möglichen Schnittpunkte auf $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ der Strecke liegen (denn dann stehen die beiden Seiten im Verhältnis 3 zu 4), weswegen die Abschnitte an den Enden der Stecke dreimal so lang sind wie der Abschnitt zwischen den beiden Schnittpunkten. Bereits bei einer Anordnung von fünf Strecken im Fünfeck (mit verlängerten Kanten) entstehen hierbei weitere Schnittpunkte. Da dies aber laut Aufgabenstellung verboten ist, muss eine Anordnung wie in Abbildung 2 verwendet werden.

Aufgabe M.3 (5 P.)**.** Auf 30 Karten stehen Zahlen in folgender Weise: Auf zehn Karten steht a, auf weiteren zehn Karten b und auf den restlichen zehn c (mit paarweise verschieden reellen Zahlen a, b, c). Es ist bekannt, dass zu fünf beliebigen Karten stets fünf andere existieren, so dass die Summe der Zahlen auf diesen zehn Karten null ergibt. Beweise, dass eine der Zahlen a, b und c null sein muss.

Lösung. Angenommen, keine der drei Zahlen ist null. Zu fünf gleichen Karten mit dem größten Betrag von a, b und c (also die größten, wenn man das Vorzeichen ignoriert), müssen fünf weitere Karten existieren, so dass die Summe der zehn Karten null ergibt. Dieses ist nur möglich, wenn es sich dabei um fünf gleiche Karten jeweils mit dem Negativen der ersten fünf Karten handelt.

Die Bezeichnungen a, b und c können also so gewählt werden, dass $b = -a$ gilt. Weiterhin können wir annehmen, dass a und c das gleiche Vorzeichen haben. (Sonst benennt man um.)

Zu den fünf Karten a, a, a, a, c gibt es nun fünf weitere, so dass die Summe insgesamt null ergibt. Die anderen fünf Karten können nicht alle die Aufschrift b haben, da ansonsten $5b + 4a + c = 0$ gälte, und wegen $b = -a$ folgte hieraus $a = c$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Also haben maximal vier der zehn Karten die Aufschrift b. Zu diesen Karten b können wir unter den zehn Karten also ebenso viele Karten a auswählen. Die Summe dieser Karten a und b ist null, die restlichen der zehn Karten haben aber alle die Aufschrift a oder c, also das gleiche Vorzeichen. Damit kann ihre Summe nicht null sein, was einen Widerspruch zu den Voraussetzungen darstellt. Also war die Annahme, dass keine der drei Zahlen null ist, falsch. $\square$

Aufgabe M.4 (6 P.)**.** Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die $(n + 1)!$ ein Vielfaches der Summe $1! + \cdots + n!$ ist. (Mit $k!$ wird das Produkt der natürlichen

Zahlen von 1 bis k bezeichnet.)

LÖSUNG. Die einzigen natürlichen Zahlen, welche die Anforderungen erfüllen, sind 1 und 2. Für $n = 1$ ist nämlich $(n+1)! = 2! = 2$ ein Vielfaches von $1! + \cdots + n! = 1! = 1$, und auch für $n = 2$ ist $(n+1)! = 3! = 6$ ein Vielfaches von $1! + \cdots + n! = 1! + 2! = 3$.

Es bleibt zu zeigen, dass im Fall $n \geq 3$ die Anforderungen nicht erfüllt sind. Sei also $n \geq 3$, und nehmen wir an, dass $(n+1)!$ ein Vielfaches von $1! + \cdots + n!$ ist, dass also $\frac{(n+1)!}{1!+\cdots+n!}$ eine ganze Zahl ist. Nun ist $1!+\cdots+n!$ eine ungerade Zahl, da die Summanden $2!, \ldots, n!$ gerade sind, während mit $1!$ genau ein Summand ungerade ist. Also hat $\frac{(n+1)!}{1!+\cdots+n!}$ die 2 ebenso oft als Faktor wie dies $(n+1)!$ hat. Sei nun 2^k die größte Zweierpotenz unter den Zahlen $1, \ldots, n+1$, also $2^k \leq n+1 < 2^{k+1}$. Nach Annahme ist $n+1 \geq 4$, also ist $2^k \geq 4$ und daher $2^k \neq 2$. Somit hat $(n+1)!$ die 2 mindestens $k+1$ mal als Faktor (da einmal die 2 und einmal die 2^k im Produkt $(n+1)!$ der natürlichen Zahlen von 1 bis $n+1$ auftritt). Deshalb ist $\frac{(n+1)!}{1!+\cdots+n!}$ durch 2^{k+1} teilbar, und es gilt insbesondere

$$n+1 < 2^{k+1} \leq \frac{(n+1)!}{1! + \cdots + n!} < \frac{(n+1)!}{n!} = n+1,$$

was einen Widerspruch darstellt. Deshalb muss die Annahme falsch gewesen sein, $\frac{(n+1)!}{1!+\cdots+n!}$ wäre eine ganze Zahl für irgendein $n \geq 3$. □

Aufgabe M.5. Die 1×1-Quadrate eines 10×10 Spielbretts seien rot, blau und weiß gefärbt, wobei zwei Quadrate verschiedene Farben haben, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Die Anzahl der roten Quadrate betrage 20.

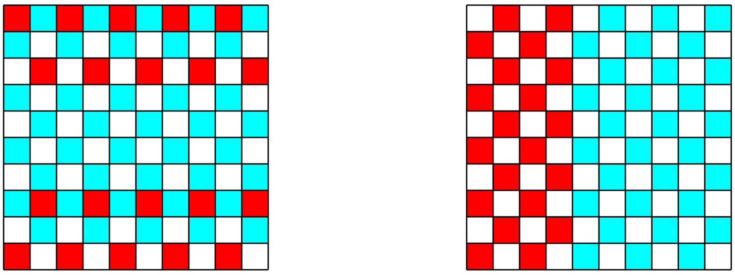
(a) (2 P.) Beweise, dass man 30 Rechtecke so ausschneiden kann, dass jedes von ihnen genau aus einem weißen und einem blauen Quadrat besteht.

(b) (2 P.) Gib ein Beispiel einer Färbung an, bei der man 40 derartige Rechtecke ausschneiden kann (und erkläre, dass das Beispiel diese Eigenschaft hat).

(c) (2 P.) Gib ein Beispiel an einer Färbung an, bei der es nicht möglich ist, mehr als 30 solche Rechtecke auszuschneiden (und erkläre, dass das Beispiel diese Eigenschaft hat).

LÖSUNG. (a) Man zerschneide das gesamte Spielbrett in 50 gleich große Rechtecke, zum Beispiel indem man es zunächst in seine 10 Zeilen zerschneidet und dann jede dieser Zeilen in 5 gleich große Rechtecke zerschneidet. Jedes dieser 50 Rechtecke besteht aufgrund der Voraussetzungen aus zwei unterschiedlich gefärbten Quadraten, und nur 20 der Rechtecke beinhalten ein rotes Quadrat. Somit bestehen die restlichen 30 Rechtecke jeweils aus einem weißen und einem blauen Quadrat.

(b) Zeichnung siehe Abbildung 3, linke Seite. Es ist leicht zu sehen, dass diese Verteilung den Voraussetzungen genügt, denn je zwei benachbarte Felder sind unterschiedlich gefärbt, und es sind genau 20 rote Felder vorhanden. Da man die Felder jeder der 10 Spalten so zerschneiden kann, dass man 4 blau-weiße Rechtecke erhält (sowie zwei rote Quadrate), kann man insgesamt 40 blau-weiße Rechtecke ausschneiden.



(b) (c)

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.5, Teile b und c.

(c) Zeichnung siehe Abbildung 3, rechte Seite. Auch hier sind die Voraussetzungen erfüllt, denn je zwei benachbarte Felder sind unterschiedlich gefärbt, und es sind genau 20 rote Felder vorhanden. Da es nur 30 blaue Felder gibt, kann man nicht mehr als 30 blau-weiße Rechtecke ausschneiden.

□

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.)**.** Auf 30 Karten stehen Zahlen in folgender Weise: Auf zehn Karten steht a, auf weiteren zehn Karten b und auf den restlichen zehn c (mit paarweise verschieden reellen Zahlen a, b, c). Es ist bekannt, dass zu fünf beliebigen Karten stets fünf andere existieren, so dass die Summe der Zahlen auf diesen zehn Karten null ergibt. Beweise, dass eine der Zahlen a, b und c null sein muss.

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.3 □

Aufgabe O.2 (5 P.)**.** Gibt es natürliche Zahlen n und m, für die das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 1, 2, ..., n genau 2008 mal so groß ist wie das der Zahlen 1, 2, ..., m?

Lösung. Angenommen $\mathrm{kgV}(1, \dots, n) = 2008 \cdot \mathrm{kgV}(1, \dots, m)$. Die Primfaktorzerlegung von 2008 ist $2^3 \cdot 251$. Also kommt in $\{m+1, \dots, n\}$ eine Zahl vor, die drei Faktoren 2 mehr beinhaltet als die Zahl mit den meisten Faktoren 2 aus $\{1, \dots, m\}$. Damit dieses möglich ist, muss $n \geq 4 \cdot m$ gelten, da die Zweierpotenzen die kleinsten Zahlen sind, bei denen neue Faktoren 2 hinzukommen und somit $\{m+1, \dots, n\}$ drei Zweierpotenzen enthalten muss.

Daher enthält $\{m+1, \dots, n\}$ auch eine Dreierpotenz und somit kommt der Faktor 3 in $\mathrm{kgV}(1, \dots, n)$ einmal häufiger vor als in $\mathrm{kgV}(1, \dots, m)$. Da 3 allerdings kein Teiler von 2008 ist, widerspricht dies der Annahme $\mathrm{kgV}(1, \dots, n) = 2008 \cdot \mathrm{kgV}(1, \dots, m)$. □

Bemerkung. Man kann auch die Folgerung aus dem Satz von Bertrand und Chebyshev verwenden, dass zwischen zwei Zweierpotenzen immer eine Primzahl liegt. Damit müsste $\{m+1, \dots, n\}$ zwei neue Primzahlen enthalten, von denen nur eine 251 sein kann. Allerdings ist der Beweis des Satzes von Bertrand und Chebyshev deutlich schwieriger als die gesamte Aufgabe.

Aufgabe O.3 (5 P.)**.** Im Dreieck ΔABC sei bei A ein rechter Winkel, M der Mittelpunkt der Seite BC und H der Fußpunkt der Höhe auf BC. Die Senkrechte zu AC durch M schneide den Umkreis des Dreiecks ΔAMC zweimal, einmal in M und einmal im Punkt P. Beweise, dass die Strecke BP die Strecke AH halbiert.

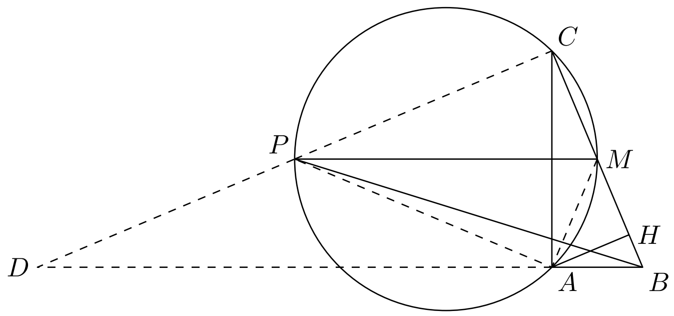


Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.3.

Lösung. Da M Mittelpunkt von BC ist und $\angle BAC$ ein rechter Winkel, gilt nach dem Satz von Thales $|MC| = |MA|$ (denn M ist der Mittelpunkt des Umkreises von ΔABC). Wegen $MP \perp AC$ ist das Viereck $AMCP$ symmetrisch bezüglich der Achse MP (ein Drachenviereck), es gilt also $\angle MAP = \angle PCM$. Da $AMCP$ ein Sehnenviereck ist, gilt außerdem $\angle MAP + \angle PCM = 180°$ und somit sind $\angle MAP$ und $\angle PCM$ rechte Winkel. Sei D der Schnittpunkt (der Verlängerung) von CP mit (der Verlängerung von) AB. Nun ist P Mittelpunkt von CD, da M Mittelpunkt von BC ist und $PM \parallel DB$ (da beide Strecken senkrecht auf AC stehen). Da auch $DC \parallel AH$ (da beide Strecken senkrecht auf BC stehen), halbiert BP auch die Strecke AH nach dem Strahlensatz. □

Aufgabe O.4 (5 P.)**.** Gegeben seien ein konvexes Polygon und ein Quadrat. Liegen zwei Kopien des Polygons im Quadrat, so gibt es immer einen Punkt, der in beiden liegt. Beweise, dass es bei jeder Anordnung dreier Kopien des Polygons im Quadrat immer einen Punkt gibt, der in allen dreien liegt.

Lösung. Es wird gezeigt, dass ein solches Polygon immer den Mittelpunkt des Quadrates enthält. Dieser liegt dann auch in drei Kopien des Polygons.

Man betrachte zu einem beliebig im Quadrat platzierten solchen Polygon seine Spiegelung am Quadratmittelpunkt. Diese beiden Kopien haben einen gemeinsamen Punkt. Auch die Spiegelung dieses Punktes am Quadratmittelpunkt ist ein gemeinsamer Punkt. Da das Polygon konvex ist, liegt der Quadratmittelpunkt dann ebenfalls im Polygon. □

Aufgabe O.5 (6 P.)**.** Gegeben sei die Tabelle rechts. Erlaubte Operationen seien das Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten. Wie viele verschiedene Tabellen kann man aus der vorgegebenen Tabelle durch beliebig häufiges Anwenden dieser Operationen erhalten?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Lösung. Man kann $7! \cdot 6! = 3.628.800$ verschiedene Tabellen erzeugen. Das sieht man wie folgt: Es gibt 7! Möglichkeiten, wie die erste Zeile einer durch Vertauschen erhaltenen Tabelle aussehen kann. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es weitere 6! Möglichkeiten, wie die erste Spalte aussehen kann. Dies macht insgesamt $7! \cdot 6!$ Möglichkeiten, wie die erste Zeile und Spalte aussehen können.

Alle diese Möglichkeiten können auch erzeugt werden, nämlich indem man zunächst die Spalten derart vertauscht, dass die erste Zeile das gewünschte Aussehen erhält, und danach die Zeilen 2 bis 7 derart vertauscht, dass die erste Spalte das gewünschte Aussehen erhält. Es gibt also mindestens $7! \cdot 6!$ verschiedene Tabellen, die man erreichen kann.

Um zu beweisen, dass es nicht mehr Tabellen gibt, müssen wir zeigen, dass durch das Aussehen der ersten Zeile und Spalte bereits das Aussehen der gesamten Tabelle bestimmt ist. Hierzu benötigen wir eine Eigenschaft der ursprünglichen Tabelle. Das Feld in Zeile i und Spalte k nennen wir Feld (i, k). In diesem Feld steht entweder $k - i + 1$ oder $k - i + 8$, je nachdem, welche dieser beiden Zahlen zwischen 1 und 7 liegt. Denn in der Diagonalen (also bei $i = k$) steht stets eine 1, was gerade dem Wert $k - i + 1$ entspricht. Zudem werden die Einträge von links nach rechts so lange um 1 größer bis der Wert 7 erreicht ist und beginnen danach wieder bei 1. Der Eintrag eines Feldes (i, k) mit $i < k$ (also rechts von der Diagonalen) ist somit um $k - i$ größer als der Eintrag von Feld (i, i), also gerade $k - i + 1$, wie behauptet. Entsprechend erhält man, dass in jedem Feld (i, k) mit $i > k$ (also links von der Diagonalen) der Eintrag $k-i+8$ steht.

Betrachten wir nun vier Felder der ursprünglichen Tabelle, die „rechteckig“ angeordnet sind – hiermit ist gemeint, dass es Zahlen i, j, k, l gibt, so dass es sich um die vier Felder (i, k), (i, l), (j, k) und (j, l) handelt. Addieren wir nun die Werte in zwei sich in diesem Rechteck gegenüber liegenden Feldern, so erhalten wir – egal ob wir die Einträge in den Feldern (i, k) und (j, l) addieren oder die Einträge in den Feldern (i, l) und (j, k) – einen der Werte $k + l - i - j + 2$, $k + l - i - j + 9$ oder $k + l - i - j + 16$. Insbesondere unterscheiden sich die beiden berechneten Summen um ein Vielfaches von 7.

Wir behaupten nun, dass auch in einer durch Vertauschen von Zeilen sowie Spalten erzeugten „neuen“ Tabelle diese Eigenschaft erhalten bleibt, dass also die Summe der Einträge in den Feldern (i, k) und (j, l) und die der Einträge in den Feldern (i, l) und (j, k) sich um ein Vielfaches von 7 unterscheiden. Dies folgt jedoch unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft der ursprünglichen Tabelle: Die Zeilen i und j sowie die Spalten k und l der neuen Tabelle entsprechen den Zeilen beziehungsweise Spalten i', j', k' und l' der ursprünglichen Tabelle. Somit entsprechen die Einträge der betrachteten Felder der neuen Tabelle gerade den Einträgen der Felder (i', k'), (i', l'), (j', k') und (j', l') in der ursprünglichen Tabelle. Da sich hier die Summen der gegenüber liegenden Felder um ein Vielfaches von 7 unterscheiden, gilt dies auch für die entsprechenden Felder in der neuen Tabelle.

Dies zeigt, dass das Aussehen der Tabelle bereits durch das Aussehen der ersten Zeile und Spalte bestimmt ist: Ist von einer neuen Tabelle die erste Zeile und die erste Spalte bekannt, so erhält man den Eintrag in Feld (i, k), indem man beachtet, dass die Summe dieses Eintrags mit dem Eintrag in Feld $(1, 1)$ (welcher bereits gegeben ist) sich um ein Vielfaches von 7 unterscheidet von der Summe der Einträge der Felder $(1, k)$ und $(i, 1)$ (welche beide gegeben sind). Da es unter den Zahlen von 1 bis 7 nur eine Zahl geben kann, die dies erfüllt, ist der Eintrag von Feld (i, k) eindeutig bestimmt.

Daher gibt es zu jeder Verteilung der Zahlen in der ersten Spalte und in der ersten Zeile genau eine Tabelle, die sich durch Vertauschen von Zeilen und von Spalten erreichen lässt. Somit gibt es wie behauptet $7! \cdot 6!$ verschiedene Tabellen. □

Alternative Lösung. Wir beweisen, dass es nicht mehr als $7! \cdot 6!$ verschiedene Tabellen gibt. Der Beweis, dass es mindestens $7! \cdot 6!$ gibt, läuft wie zuvor.

Es gibt 7! Möglichkeiten, wie man die Spalten vertauschen kann. Für die Vertauschung der Zeilen gibt es ebenso viele Möglichkeiten. Insgesamt gibt es daher $7! \cdot 7!$ Möglichkeiten, wie die Zeilen und Spalten vertauscht sein können. Wir behaupten, dass jeweils 7 davon zu der gleichen Tabelle führen, womit bewiesen wäre, dass es nicht mehr als $7! \cdot 6!$ verschiedene Tabellen gibt.

Zeigen wir zunächst, dass es 7 Vertauschungsmöglichkeiten gibt, die allesamt die ursprüngliche Tabelle zum Ergebnis haben. Die Spalten seien von links nach rechts nummeriert, die Zeilen von oben nach unten. Vertauschen wir nun die Spalten derart, dass Spalte 7 der ursprünglichen Tabelle auf Spalte 1 der neuen Tabelle zu liegen kommt und dass jede weitere Spalte der ursprünglichen Tabelle, etwa Spalte k mit $1 \leq k \leq 6$, auf Spalte $k + 1$ der neuen Tabelle zu liegen kommt, und verfahren wir mit den Zeilen ebenso, so haben wir die Felder der ursprünglichen Tabelle lediglich entlang der Diagonalen verschoben, auf denen die Einträge konstant sind, die neue Tabelle ist also identisch mit der ursprünglichen. Da man die Zeilen und Spalten in entsprechender Weise auch um 2, 3, 4, 5 oder 6 Positionen verschieben kann, gibt es (inklusive der Möglichkeit, gar nicht zu vertauschen) 7 Vertauschungen, welche die ursprüngliche Tabelle unverändert lassen.

Betrachten wir nun eine beliebige andere Tabelle sowie eine feste Vertauschung, durch welche diese Tabelle erzeugt wird. Indem wir nun zunächst eine der 7 gerade beschriebenen Vertauschungen vornehmen und danach diese feste Vertauschung, erhalten wir 7 verschiedene Vertauschungen, welche alle die betrachtete Tabelle erzeugen.

Also führen jeweils 7 Vertauschungen zu der gleichen Tabelle, es gibt daher nicht mehr als $7! \cdot 6!$ verschiedene Tabellen und daher genau $7! \cdot 6!$ Tabellen. □

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Torben Schiffner, Amos Schikowsky, Klaus Sielaff, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.