Städtewettbewerb Frühjahr 2006
Lösungsvorschläge

Hamburg

13. April 2006 [Version 26. April 2006]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.). In dem Dreieck ABC sei der Winkel bei A $60°$. Die Mittelsenkrechte der Seite AB schneidet die Gerade AC in N und die Mittelsenkrechte der Seite AC schneidet die Gerade AB in M. Zeige, dass die Strecken MN und BC gleich lang sind.

Lösung. Da M auf der Mittelsenkrechten von AC liegt, ist $|AM| = |MC|$. Der Basiswinkel $\angle MAC$ im gleichschenkligen Dreieck AMC beträgt $60°$, weshalb AMC sogar gleichseitig ist. Analog ist auch ABN ein gleichseitiges Dreieck.

Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$ geht somit B in N und C in M über, also auch CB in MN, weshalb $|CB| = |MN|$ gilt. □

Aufgabe M.2 (3 P.). Betrachte eine $n \times n$-Tafel. In jedem Feld der ersten Spalte steht die Zahl 1, in jedem der Feld der zweiten Spalte steht die Zahl 2 u.s.w. Dann radiert jemand alle Zahlen auf der Diagonalen von links oben bis nach rechts unten aus. Zeige, dass die Summe der Zahlen oberhalb dieser Diagonalen genau zweimal so groß ist wie die Summe der Zahlen unterhalb dieser Diagonalen.

Lösung. Addiert man in der unteren-linken Hälfte jede Zeile in umgekehrter Reihenfolge zu der selben Zeile hinzu, so erhält man an jeder Stelle die Zeilennummer als Zahl, nämlich die Summe der ersten und letzten Zahl in dieser Zeile (die gleiche Summe wie von der zweiten und vorletzten Zahl usw.). Damit ist jede Zeile in der unteren-linken Hälfte verdoppelt genau so groß wie die entsprechende Spalte in der oberen-rechten Hälfte.

Beispiel:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1+1 & & 3 & 4 \\ \hline 1+2 & 2+1 & & 4 \\ \hline 1+3 & 2+2 & 3+1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

Man kann das auch sehen, indem man die Summe der j-ten Zeile bis zur Diagonalen betrachtet

$$1 + 2 + \cdots + (j-1) = \frac{(j-1)j}{2}, \qquad 2 \leq j \leq n$$

und mit der Summe der j-ten Spalte bis zur Diagonalen vergleicht

$$\underbrace{j + j + \cdots + j}_{(j-1)\text{-mal}} = (j-1)j$$

(welche offensichtlich genau doppelt so groß ist). □

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** Es sei $a > 0$ so gewählt, dass es genau drei ganze Zahlen x gibt mit $1 < x \cdot a < 2$. Wie viele ganzzahlige Lösungen können dann die Ungleichungen $2 < x \cdot a < 3$ haben? Bestimme alle Möglichkeiten.

Lösung. Sei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$na \leq 1 < (n+1)a < (n+2)a < (n+3)a < 2 \leq (n+4)a.$$

Aus $na \leq 1$ und $2 \leq (n+4)a$ folgt $4a \geq 1$ und aus $1 < (n+1)a$ und $(n+3)a < 2$ folgt $2a < 1$. Somit können die Ungleichungen $2 < xa < 3$ keine 5 verschiedenen Lösungen haben, denn die Differenz der größten und der kleinsten Lösung x wären in diesem Fall mindestens 4. Sie haben auch nicht nur eine Lösung x, denn ansonsten wäre $(x-1)a \leq 2$ und $(x+1)a \geq 3$ und somit $2a \geq 1$. Die möglichen Anzahlen ganzzahliger Lösungen sind also 2, 3 und 4. Dass alle diese Anzahlen auch tatsächlich auftreten, zeigen die folgenden Beispiele.

$a = \frac{3}{8}$: Hierfür gilt $1 < xa < 2$ genau für $x = 3, 4, 5$, weswegen die Voraussetzungen erfüllt sind. Zudem hat $2 < xa < 3$ genau 2 ganzzahlige Lösungen, nämlich $x = 6$ und $x = 7$.

$a = \frac{1}{4}$: Hierfür gilt $1 < xa < 2$ genau für $x = 5, 6, 7$, weswegen die Voraussetzungen erfüllt sind. Zudem hat $2 < xa < 3$ genau 3 ganzzahlige Lösungen, nämlich $x = 9$, $x = 10$ und $x = 11$.

$a = \frac{5}{17}$: Hierfür gilt $1 < xa < 2$ genau für $x = 4, 5, 6$, weswegen die Voraussetzungen erfüllt sind. Zudem hat $2 < xa < 3$ genau 4 ganzzahlige Lösungen, nämlich $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$ und $x = 10$.

□

Aufgabe M.4. Drei Kinder – Ann, Borya und Vitya – sitzen an einem runden Tisch, auf dem mehr als drei Nüsse liegen. Zu Anfang hat Ann sämtliche Nüsse. Ist die Anzahl der Nüsse gerade, so verteilt Ann alle Nüsse an Borya und Vitya, wobei jeder (genau) die Hälfte bekommt. Ist die Anzahl ungerade, so isst sie eine Nuss und verteilt den Rest wie oben. Dann ist ihr rechter Nachbar dran, der in analoger Weise verfährt. Dieses Spiel setzen sie reihum immer weiter fort. Beweise, dass

(a) (3 P.) mindestens eine Nuss gegessen wird;

(b) (3 P.) die Kinder niemals alle Nüsse aufessen.

Lösung. (a) Nach n Zügen des Spieles sind die Nüsse in irgendeiner Weise verteilt. Hierzu bezeichne $A(n)$ die Anzahl von Nüssen des Kindes, welches als nächstes an der Reihe ist, seine Nüsse zu verteilen und $B(n)$ die Anzahl von Nüssen des Kindes, welches danach an der Reihe ist. (Das dritte Kind hat jeweils gerade keine Nüsse.) Bezeichnet N die Gesamtzahl der Nüsse, so haben wir zu Beginn (nach 0 Zügen) also $A(0) = N$ und $B(0) = 0$.

Um zu beweisen, dass eine Nuss gegessen wird, müssen wir zeigen, dass $A(n)$ irgendwann ungerade wird. Wir zeigen, dass $A(n)$ und $B(n)$ für $n \geq 1$ stets von der Form $\frac{uN}{2^n}$ sind mit ungeradem u, solange noch keine Nuss gegessen wurde. Da N nicht beliebig oft durch 2 teilbar ist, würde $A(n)$ somit irgendwann ungerade und wir wären fertig.

Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr, da $A(1) = B(1) = \frac{N}{2}$ (außer, es wurde im ersten Schritt eine Nuss gegessen; dann wären wir jedoch bereits fertig). Nehmen wir nun $A(n) = \frac{u_1 N}{2^n}$ und $B(n) = \frac{u_2 N}{2^n}$ an und nehmen wir weiter an, dass dies gerade Zahlen sind (sonst wären wir erneut fertig), so erhalten wir wie gewünscht $A(n+1) = \frac{(2u_2+u_1)N}{2^{n+1}}$ und $B(n+1) = \frac{u_1 N}{2^{n+1}}$.

(b) Es wird gezeigt, dass derjenige, der am Zug ist, immer mindestens zwei Nüsse hat. Für die ersten beiden Züge ist dieses richtig, da im ersten Zug mindestens zwei Nüsse an den Zweiten verteilt werden. Danach hat derjenige, der am Zug ist, jeweils mindestens eine Nuss bekommen, als sein linker und rechter Nachbar das letzte Mal am Zug waren, besitzt also mindestens zwei Nüsse.

□

Alternative Lösung. Mit den gleichen Bezeichnungen wie oben kann man auch so argumentiren:

(a) Nehmen wir an, dass keine Nüsse gegessen werden, dass $A(n)$ also stets gerade ist. Wir zeigen, dass dann stets $A(n) - 2B(n) = \frac{N}{(-2)^n}$ gilt, woraus sich ein Widerspruch ergibt, da $A(n) - 2B(n)$ stets ganzzahlig ist, während $\frac{N}{(-2)^n}$ zum Beispiel für $2^n > N$ nicht ganzzahlig ist.

Für $n = 0$ ist die Behauptung offensichtlich wahr. Mit $A(n+1) = \frac{1}{2}A(n) + B(n)$ und $B(n+1) = \frac{1}{2}A(n)$ folgt

$$\begin{aligned} A(n+1) - 2B(n+1) &= \frac{1}{2}A(n) + B(n) - A(n) = B(n) - \frac{1}{2}A(n) \\ &= -\frac{1}{2}(A(n) - 2B(n)) = \frac{N}{(-2)^{n+1}} \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(b) Nach einem Zug haben wir $A(1) = B(1) \geq 2$. Da Ann gerade alle ihre Nüsse verteilt hat, folgt nun $A(2) > B(2) > 0$ und ebenso folgt $A(n) > B(n) > 0$ für alle $n \geq 2$. Äßen die Kinder sämtliche Nüsse auf, gäbe es einen Zeitpunkt, an dem genau drei Nüsse vorhanden sind (da in jedem Zug höchstens eine Nuss gegessen wird). Für diesen Zeitpunkt folgt dann aber $A(n) = 2$ und $B(n) = 1$, womit auch $A(m) = 2$ und $B(m) = 1$ gilt für alle $m > n$. Daher werden nie alle Nüsse aufgegessen.

□

Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass jede Ausgangszahl N schließlich in einer Verteilung der Form $2n$, n und 0 endet (welche dann offensichtlich konstant bleibt). Wesentlich schwieriger zu sehen ist, dass es zu jedem $n \geq 1$ auch wirklich eine Ausgangszahl N gibt, die in gerade dieser Verteilung $2n$, n und 0 endet. Weiter kann man zeigen, dass nicht nur mindestens eine Nuss gegessen wird, sondern dass es zu jeder Zahl k unendlich viele verschiedene Ausgangszahlen N gibt, für die genau k Nüsse gegessen werden, bis schließlich eine Verteilung der Form $2n$, n und 0 erreicht wird.

Aufgabe M.5. Peter möchte aus n^3 weißen Würfelchen der Kantenlänge 1 einen großen Würfel der Kantenlänge n bilden. Er möchte es dabei so einrichten, dass alle sechs Außenflächen vollständig weiß sind. Wie viele Flächen der Würfelchen muss Vasya mindestens schwarz anmalen, um Peter daran zu hindern?

(a) (2 P.) falls $n = 2$;

(b) (4 P.) falls $n = 3$.

Lösung. Es gibt vier verschiedenartige Plätze im n^3-Würfel:

- 8 Eckenwürfelchen E – sind hier 2 gegenüberliegende Seiten bemalt, so ist immer eine außen, was sich bei nur einer bemalten Seite stets verhindern lässt.
- $12(n-2)$ Kantelwürfelchen, die nicht an den Ecken liegen, K – sind hier 4 Seiten so bemalt, dass zwei gegenüberliegende unbemalt bleiben, so ist immer eine außen, was sich bei weniger bemalten Seiten stets verhindern lässt.
- $6(n-2)^2$ Flächenwürfelchen, die nicht auf den Kanten liegen, F – bei 6 bemalten Seiten ist immer eine außen, sonst kann auch eine unbemalte nach außen zeigen.
- $(n-2)^3$ innere Würfelchen I – bei diesen zeigt nie eine Seite nach außen.

(Die Feststellungen gelten für $n > 1$.)

Also genügen Vasya

(a) $n^3 - 8 + 1$ an 2 Seiten bemalte Würfelchen, dann ist nämlich mindestens eins auf einer E, da es nur $n^3 - 8$ K, F und I gibt.

(b) $n^3 - 8 - 12(n-2) + 1$ an 4 Seiten bemalte Würfelchen, dann ist nämlich mindestens eines auf K oder E, da es nur $n^3 - 8 - 12(n-2)$ F und I gibt.

(c) $(n-2)^3 + 1$ an 6 Seiten bemalte Würfelchen, dann ist nämlich mindestens eins nicht I, da es nur $(n-2)^3$ I gibt.

Mit weniger ist es jeweils nicht möglich zu gewährleisten, dass stets eine bemalte Seite von außen sichtbar ist. Denn angenommen, Vasya bemalt die Würfelchen so, dass jeweils weniger als die oben angegebenen Anzahlen auf 2, 4 und 6 Seiten bemalt sind, so kann Peter zunächst 8 Würfelchen mit höchstens einer bemalten Seite auf E verteilen, dann weitere $12(n-2)$ Würfelchen mit höchstens 3 bemalten Seiten auf K, weitere $6(n-2)^2$ Würfelchen mit höchstens 5 bemalten Seiten auf F und den Rest auf I.

(a) Bei $n = 2$ reicht offensichtlich 1 an 2 (gegenüberliegenden) Seiten bemaltes Würfelchen. Es müssen mindestens 2 Flächen bemalt sein.

(b) Bei $n = 3$ kommen in Frage: $2\cdot(27-8+1) = 40$ (Fall a), $4\cdot(27-8-12+1) = 32$ (Fall b) oder $6\cdot(1^3+1) = 12$ (Fall c). Es sind also mindestens 12 Flächen, was mit 2 an 6 Seiten bemalten Würfelchen möglich ist.

□

O Oberstufe

Aufgabe O.1. Betrachten Sie ein konvexes Polyeder mit genau 100 Kanten. Jede seiner Ecken wird genau durch einen ebenen Schnitt abgetrennt. Dabei schneiden sich die Schnittebenen nicht im Innern und auch nicht auf der Oberfläche des Polyeders. Finden Sie für das sich so ergebende Polyeder heraus,

(a) (1 P.) wie viele Ecken es hat;

(b) (2 P.) wie viele Kanten es hat.

LÖSUNG. (a) Jede Ecke des entstandenen Polyeders liegt auf einer Kante des ursprünglichen Polyeders. Denn alle Ecken des ursprünglichen Polyeders sind nun abgeschnitten und auf den Seitenflächen können keine neuen Ecken entstehen, ohne dass sich dort zwei Schnittebenen schneiden. Für jede Kante des ursprünglichen Polyeders hat das entstandene Polyeder 2 Ecken, diese sind zudem verschieden für jede solche Kante. Demnach hat das entstandene Polyeder 200 Ecken.

(b) In dem entstandenen Polyeder treffen an jeder Ecke genau 3 Kanten aufeinander, nämlich eine abgeschnittene Kante des ursprünglichen Polyeders sowie zwei „neue“ Kanten. Da jede Kante zwischen 2 Ecken verläuft, hat das entstandene Polyeder $200 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 300$ Kanten.

□

Aufgabe O.2 (3 P.)**.** Gibt es eine gerade Funktion $p(x)$ und eine weitere Funktion $q(x)$, so dass die Funktion $p(q(x))$ ungerade ist (ohne die Nullfunktion zu sein)? (Dabei heißt eine Funktion $p(x)$ gerade, wenn stets $p(-x) = p(x)$ gilt, und ungerade, wenn stets $p(-x) = -p(x)$ gilt.)

LÖSUNG. Die Funktion $p(x) := \cos x$ ist gerade. Setzt man $q(x) := x - \frac{\pi}{2}$, so ist $p(q(x)) = \sin x$, welches eine ungerade Funktion ist. □

Aufgabe O.3 (4 P.)**.** Es sei $a > 0$ so gewählt, dass es genau fünf positive ganze Zahlen x gibt mit $10 < a^x < 100$. Wie viele ganzzahlige positive Lösungen können dann die Ungleichungen $100 < a^x < 1000$ haben? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten.

LÖSUNG. Sei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$a^n \leq 10 < a^{n+1} < \cdots < a^{n+5} < 100 \leq a^{n+6}.$$

Aus $a^n \leq 10$ und $100 \leq a^{n+6}$ folgt $a^6 \geq 10$ und aus $10 < a^{n+1}$ und $a^{n+5} < 100$ folgt $a^4 < 10$. Somit können die Ungleichungen $100 < a^x < 1000$ keine 7 verschiedenen Lösungen haben, denn die Differenz der größten und der kleinsten Lösung x wäre in diesem Fall mindestens 6. Sie haben auch nicht weniger als 4 Lösungen x, $x+1$ und höchstens $x+2$, denn ansonsten wäre $a^{x-1} \leq 100$ und $a^{x+3} \geq 1000$ und somit $a^4 \geq 10$. Die möglichen Anzahlen ganzzahliger Lösungen sind also 4, 5 und 6. Dass alle diese Anzahlen auch tatsächlich auftreten, zeigen die folgenden Beispiele. Man findet sie, indem man zunächst $a = 10^b$ schreibt und dann Zahlen b sucht, für die $1 < xb < 2$ genau 5 und $2 < xb < 3$ genau 4, 5 bzw. 6 Lösungen haben.

$a = 10^{\frac{3}{14}}$: Hierfür gilt $10 < a^x < 100$ genau für $x = 5, 6, 7, 8, 9$, weswegen die Voraussetzungen erfüllt sind. Zudem hat $100 < a^x < 1000$ genau 4 ganzzahlige Lösungen, nämlich $x = 10$ bis $x = 13$.

$a = 10^{\frac{1}{6}}$: Hierfür gilt $10 < a^x < 100$ genau für $x = 7, 8, 9, 10, 11$, weswegen die Voraussetzungen erfüllt sind. Zudem hat $10 < a^x < 1000$ genau 5 ganzzahlige Lösungen, nämlich $x = 13$ bis $x = 17$.

$a = 10^{\frac{5}{27}}$: Hierfür gilt $10 < a^x < 100$ genau für $x = 6, 7, 8, 9, 10$, weswegen die Voraussetzungen erfüllt sind. Zudem hat $10 < a^x < 1000$ genau 6 ganzzahlige Lösungen, nämlich $x = 11$ bis $x = 16$.

□

Aufgabe O.4 (5 P.)**.** Das Viereck $ABCD$ besitzt einen Umkreis, ferner gilt $|AB| = |AD|$. Der Punkt M liegt auf der Seite BC, während Punkt N auf der Seite CD liegt. Der Winkel $\angle MAN$ ist halb so groß wie der Winkel $\angle BAD$. Zeigen Sie $|MN| = |BM| + |ND|$.

LÖSUNG. Zeichnung siehe Abbildung 1. Dreht man das Dreieck AND um den Punkt A, so dass das Bild von D gerade auf B liegt (was wegen $|AB| = |AD|$ möglich ist), so bezeichnen wir das zugehörige Bild von N mit N'. Die Dreiecke

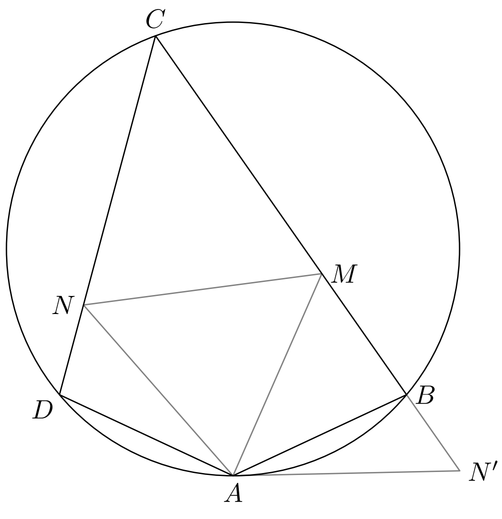

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung der Aufgabe O.4

AMN und $AN'M$ sind kongruent, da sowohl ihre Winkel bei A als auch die

Längen der einschließenden Seiten gleich sind. (Dass die Winkel bei A gleich sind, folgt aus $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAD = \angle N'AN$.) Somit ist insbesondere $|MN| = |MN'|$. Da $ABCD$ einen Umkreis besitzt, ist $\angle CBA + \angle ADC = 180°$. Somit liegen insbesondere M, B und N' auf einer Geraden. Es gilt also $|MN'| = |MB| + |BN'|$. Mit $|BN'| = |DN|$ erhalten wir sofort die gewünschte Beziehung $|MN| = |BM| + |ND|$. □

Aufgabe O.5. Peter möchte aus n^3 weißen Würfelchen der Kantenlänge 1 einen großen Würfel der Kantenlänge n bilden. Er möchte es dabei so einrichten, dass alle Außenflächen weiß sind. Wie viele Flächen der Würfelchen muss Vasya mindestens schwarz anmalen, um Peter daran zu hindern?

(a) (3 P.) falls $n = 3$;

(b) (3 P.) falls $n = 1000$.

Lösung. Die allgemeine Betrachtung wurde in der Lösung zur Aufgabe M.5 ausgeführt. Speziell:

(a) Siehe Lösung zur Aufgabe M.5 b.

(b) Bei $n = 1000$ kommen in Frage: $2 \cdot (1000^3 - 8 + 1) = 1'999'999'986$ (Fall a), $4 \cdot (1000^3 - 8 - 12 \cdot 998 + 1) = 3'999'952'068$ (Fall b) oder $6 \cdot (998^3 + 1) = 5'964'071'958$ (Fall c). Es sind also mindestens $1'999'999'986$ Flächen, was mit $1000^3 - 7$ an 2 Seiten bemalten Würfelchen möglich ist.

□

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Klaus Sielaff, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.