27. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 9. November 2005

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Für welche natürlichen Zahlen n gibt es lauter verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so dass $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \cdots + a_n/a_1$ wieder eine natürliche Zahl ist, und für welche n nicht?

Aufgabe 2:

Zwei Ameisen krabbeln entlang der Kanten eines polygonalen Tisches, wobei der Abstand zwischen ihnen immer exakt 10 cm beträgt. Jede Tischkante ist länger als einen Meter. Zu Anfang befinden sich beide Ameisen auf der gleichen Kante.

a) [2 Punkte] Angenommen, der Tisch ist konvex, d.h. er hat keine einspringende Ecke. Ist es dann immer möglich, dass jede der beiden Ameisen den gesamten Rand des Tisches besucht?

b) [3 Punkte] Angenommen, der Tisch ist nicht notwendigerweise konvex. Ist es dann immer möglich, dass jeder Punkt des Randes von mindestens einer der beiden Ameisen besucht wird?

Aufgabe 3: [5 Punkte]

Auf jedem der 64 Felder eines Schachbretts steht zu Anfang ein Turm. Es werden nun nacheinander alle die Türme entfernt, die eine ungerade Anzahl von Türmen bedrohen. Wie viele Türme können auf diese Weise höchstens entfernt werden? (Ein Turm bedroht einen anderen Turm, wenn dieser in der gleichen Zeile oder Spalte steht und sich zwischen ihnen kein weiterer Turm befindet.)

Aufgabe 4: [6 Punkte]

Einige positive Zahlen, die alle ≤ 1 sind, werden auf einer Kreislinie verteilt. Beweisen Sie: Man kann stets die Kreislinie so in drei Bögen aufteilen, dass sich die Summen aller Zahlen von je zwei Bögen um höchstens 1 unterscheiden. (Falls auf einem Bogen keine Zahlen markiert sind, so wird diese Summe als 0 gewertet.)

Aufgabe 5: [7 Punkte]

In einem Dreieck ABC bezeichnen AA_1, BB_1 und CC_1 die drei Winkelhalbierenden. Ferner sei bekannt, dass sich die Winkel bei A, B und C verhalten wie $4 : 2 : 1$. Beweisen Sie, dass dann A_1B_1 und A_1C_1 gleich lang sind.

Aufgabe 6: [8 Punkte]

Man kann auf eine Tafel entweder zwei Einsen schreiben oder zwei identische Zahlen n löschen und sie durch $n + 1$ und $n - 1$ ersetzen. Wie viele solcher Operationen sind notwendig, um die Zahl 2005 zu erhalten? (Zu Beginn ist die Tafel leer.)

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**