# 27. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 9. November 2005

## MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Unter einem Palindrom versteht man eine natürliche Zahl, deren Ziffern von rechts und von links gelesen stets die gleiche Zahl ergeben. So sind z.B. 1, 343 und 2002 Palindrome, dagegen 2005 nicht. Ist es möglich, 2005 Paare der Form $(n, n+110)$ zu finden, wobei $n$ und $n+110$ beides Palindrome sind?

Aufgabe 2: [5 Punkte]

Die Verlängerungen der Seiten $AB$ und $CD$ eines konvexen (d.h. ohne einspringende Ecke) Vierecks $ABCD$ schneiden sich in dem Punkt $K$. Ferner ist bekannt, dass die Seiten $AD$ und $BC$ gleich lang sind. Beweise, dass das Dreieck $MNK$ stumpfwinklig sein muss, wobei $M$ und $N$ die Mittelpunkte der Seiten $AB$ bzw. $CD$ bezeichnen.

Aufgabe 3: [6 Punkte]

Auf jedem der 64 Felder eines Schachbretts steht zu Anfang ein Turm. Es werden nun nacheinander alle die Türme entfernt, die eine ungerade Anzahl von Türmen bedrohen. Wie viele Türme können auf diese Weise höchstens entfernt werden? (Ein Turm bedroht einen anderen Turm, wenn dieser in der gleichen Zeile oder Spalte steht und sich zwischen ihnen kein weiterer Turm befindet.)

Aufgabe 4:

Zwei Ameisen krabbeln entlang der Kanten eines polygonalen Tisches, wobei der Abstand zwischen ihnen immer exakt 10 cm beträgt. Jede Tischkante ist länger als einen Meter. Zu Anfang befinden sich beide Ameisen auf der gleichen Kante.

a) [2 Punkte] Angenommen, der Tisch ist konvex, d.h. er hat keine einspringende Ecke. Ist es dann immer möglich, dass jede der beiden Ameisen den gesamten Rand des Tisches besucht?

b) [4 Punkte] Angenommen, der Tisch ist nicht notwendigerweise konvex. Ist es dann immer möglich, dass jeder Punkt des Randes von mindestens einer der beiden Ameisen besucht wird?

Aufgabe 5: [7 Punkte]

Finde die größte natürliche Zahl $N$, für die die Gleichung $99\,x + 100\,y + 101\,z = N$ genau eine Lösung in natürlichen Zahlen $x$, $y$, $z$ hat.

Aufgabe 6: [8 Punkte]

Karlsson lebt auf dem Dach und nennt 1000 Marmeladentöpfe sein Eigen. Die Töpfe sind nicht alle gleich groß, aber kein Topf enthält mehr als $1/100$ seines gesamten Marmeladenvorrats. Zum Frühstück wählt Karlsson immer 100 Töpfe aus, wobei er dann aus jedem Topf die gleiche Portion Marmelade entnimmt. Diese Portion kann von Tag zu Tag variieren. Beweise, dass er nach einer gewissen Anzahl von Frühstücken seinen gesamten Marmeladenvorrat verputzt haben kann.

**Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!**

**An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.**

**Zeit: 4 Stunden.** **Viel Erfolg !**