24- Internationaler Mathematik,Städtewettbewerb, Frühjahr 2003

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [4 P.]

Johnny schreibt die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ mit positiven natürlichen Koeffizienten a, b, c an die Tafel. Dann kann Peter ein, zwei oder keines der + Zeichen in ein − Zeichen abändern. Falls diese neue Gleichung nur ganzzahlige Lösungen besitzt, gewinnt Johnny, falls sie keine Lösung oder mindestens eine nicht-ganze Lösung hat, so gewinnt Peter. Kann Johnny die Koeffizienten so wählen, dass er immer gewinnt?

Aufgabe 2: [4 P.]

In einem Dreieck ABC seien der Umkreisradius mit R, der Inkreisradius mit r, die Länge der kürzesten Höhe mit h und die Länge der längsten Seite mit a bezeichnet. Beweise die Ungleichung $R/r > a/h$.

Aufgabe 3:

In einem Turnier spielt jedes der 15 Teams gegen jedes andere Team genau einmal.

a) [4 P.] Beweise, dass in mindestens einem Spiel die Summe der Anzahlen der vorher gespielten Spiele beider Teams ungerade sein muss;

b) [3 P.] Kann es passieren, dass es nur genau ein derartiges Spiel gibt?

Aufgabe 4: [7 P.]

Gegeben ist eine Tafel Schokolade in Form eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge n, das in lauter gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 dadurch aufgeteilt wird, dass jede der Seiten in n gleichlange Teile zerlegt ist. Zwei Personen spielen nach folgenden Regeln: Einer beginnt, indem er aus der Tafel durch genau einen Bruch parallel zu einer der Dreiecksseiten irgend ein dreieckiges Stück herausbricht und es verspeist. Dann schiebt er den Rest seinem Gegenspieler zu, der sich ebenfalls ein dreieckiges Stück herausbricht und verspeist, u.s.w. Der Spieler, der das letzte 1-Dreieck verspeist, gewinnt. Ferner gewinnt er, wenn sein Gegner kein dreieckiges Stück mehr abbrechen kann. Finde für jedes n eine Strategie, die es einem der Spieler (entweder dem, der anfängt, oder seinem Gegner) erlaubt stets zu gewinnen, unabhängig davon wie sein Gegner spielt.

Aufgabe 5: [7 P.]

In höchstens wievielen Kästchen eines 9×9-Quadrats kann man entlang beider Diagonalen einschneiden, ohne dass das Quadrat in mehrere Teile zerfällt?

Aufgabe 6: [7 P.]

EinTrapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AD und BC besitze einen Inkreis. Ferner sei E der Schnittpunkt der Diagonalen. Zeige, dass der Winkel $\angle AED$ nicht spitz sein kann.

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**