Integralrechnung

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (x^3 + 2x - 4)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} x^2 \sin(\frac{x}{3})\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^t e^{3x-2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

In (c) und (d) ist es am einfachsten, (wiederholt) partiell zu integrieren, in (e) und (f) helfen geeignete Substitutionen. Überlegen Sie jeweils zuerst, ob Sie eine positive oder negative Antwort erwarten.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine *stetige* Funktion $F\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, so dass die Ableitung $F'(x)$ für alle $x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$ die folgende Funktion ist

$$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}\,, \quad \begin{cases} 4x - 1, & \text{für } -1 \le x < 0, \\ 2x + 3, & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1 - x, & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Kann man F so wählen, dass es in den Punkten 0 und 1 ebenfalls differenzierbar wird?

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale it der jeweils angegebenen Methode:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)^2}\,dx$ (Substitution)

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1}{x} + 1}\,dx$ (Substitution $t = \frac{1}{x} + 1$)

(c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ (Substitution)

(d) $\displaystyle\int e^x \sin(2x)\,dx$ (mehrfache partielle Integration)

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Aufgabe 5

Finde alle Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) $(3x+1) \cdot \cos(3x-2)$

(b) $x \cdot \sin(x^2) \cdot e^{x^2}$

Aufgabe 6

Über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

- f ist überall differenzierbar, und es gilt $f'(x) = k \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sowie
- $f(0) = c$.

Beweisen Sie, dass dann $f(x) = c \cdot e^{kx}$ folgt.
Tipp: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt nicht unbedingt Integralrechnung.