Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1

In der Vorlesung haben wir rationale Zahlen als Äquivalenzklassen von Brüchen, d.h. von geordneten Paaren ganzer Zahlen, definiert. Beschreiben sie die Äquivalenzklasse $[(a, b)] \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(a) wenn a und b teilerfremd sind, d.h. wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

(b) im allgemeinen Fall.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie für jede der folgenden Relationen $\sim$ auf der jeweils angegebenen Menge X, ob sie reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv ist.

(a) $X = \mathbb{Z}$; $x \sim y$, falls $x - y$ gerade ist.

(b) $X = \mathbb{Z}$; $x \sim y$, falls $x - y$ ungerade ist.

(c) $X = \mathbb{Z}$; $x \sim y$, falls x und y einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler besitzen.

(d) $X = \mathbb{R}$; $x \sim y$, falls $xy \neq 0$.

(e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, falls $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

(f) $X = \mathbb{R}$; $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}$.

(g) $X = \{$ Dreiecke ABC in der Ebene $\}$; $ABC \sim A'B'C'$, falls die beiden Dreiecke sich (als 2-dimensionale Figuren) schneiden

(h) $X = \{$ Dreiecke ABC in der Ebene $\}$; $ABC \sim A'B'C'$, falls für die Seitenlängen

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

gilt.

(i) $X = \{$ Geraden in der Ebene $\}$; $g \sim h$, falls g und h parallel sind.[1]

(j) $X = \mathbb{R}^2$; $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, falls $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Können Sie für die Äquivalenzrelationen unter diesen Relationen jeweils die Äquivalenzklassen beschreiben?

Denken Sie sich eine ähnliche Aufgabe für Ihre Gruppe aus (Sie sollten natürlich möglichst selbst die Lösung kennen...).

[1] Hier sind gleiche Geraden parallel.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie, welche von den folgenden Äquivalenzklassen

(a) in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ **(b)** in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

übereinstimmen:

$$[-114], [-3], [-1], [0], [1], [3], [6], [8], [9], [17], [27], [45].$$

Aufgabe 4

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gegeben als $f([x]) = [x + x^2]$, wohldefiniert ist. Klappt das für jedes Polynom?