

# Lineare Gleichungssysteme und Geometrie

## Aufgabe 1

Seien  $\mathbf{a} = (1, 3)$  und  $\mathbf{b} = (2, 1)$  zwei Vektoren in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

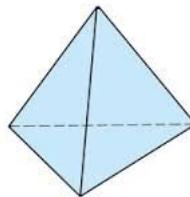
- (a) Berechnen Sie  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $2 \cdot \mathbf{b}$  und  $2 \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}$ .
- (b) Skizzieren Sie die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sowie die eben berechneten Vektoren im  $\mathbb{R}^2$ .

## Aufgabe 2

Welcher Kreis ist Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 - 6x + y^2 - 6y = 11$ ? Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.

**Aufgabe 3 (a)** Welche Figuren können entstehen, wenn man eine Ebene mit einem Würfel schneidet?

- (b) Welche Figuren können entstehen, wenn man eine Ebene mit einem Tetraeder schneidet? Finden Sie einen Schnitt, welcher ein Quadrat ist? Zur Information: Ein Tetraeder ist eine Körper im Raum der durch vier gleichseitige Dreiecke beschränkt wird. Unten ist ein Tetraeder abgebildet.



## Aufgabe 4

Wir betrachten die Gerade  $g$ , gegeben durch die Gleichung

$$4x - 3y + 2 = 0.$$

- (a) Schreiben Sie die Gerade  $g$  in Parameterform.
- (b) Skizzieren Sie die Gerade  $g$  in einem Koordinatensystem.
- (c) Berechnen Sie einen Normalenvektor  $\mathbf{n}$  zu  $g$ .

## Aufgabe 5

Geben Sie zwei Geraden im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  an, welche

- (a) parallel sind;
- (b) sich in genau einem Punkt schneiden;

(c) windschief sind, d.h. sie sind nicht parallel und schneiden sich nicht.

**Aufgabe 6 (a)** Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Ebene, welche durch den Punkt  $\mathbf{p} = (2, -1)$  geht und den Normalenvektor  $\mathbf{n} = (3, 2)$  besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Ebene, welche durch den Punkt  $\mathbf{p} = (-3, 4)$  geht und den Richtungsvektor  $\mathbf{r} = (5, 2)$  besitzt.

### Aufgabe 7

Entscheiden Sie, ob sich die zwei Geraden

$$g = \{(2, 1) + t \cdot (5, 4) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad h = \{(1, 2) + t \cdot (4, 3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie gegebenenfalls diesen Schnittpunkt.

### Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , welche den Punkt  $(1, 2, 3)$  enthält und senkrecht auf dem Vektor  $(-3, -2, -1)$  steht.

### Aufgabe 9

Sei  $E$  die Ebene  $x + 2y - z = 1$  und sei  $F$  die Ebene  $-x - y + 5z = 3$ . Bestimmen Sie die Schnittmenge von  $E$  und  $F$ .

### Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Schnittmenge des Kreises mit Gleichung  $x^2 + y^2 = 100$  und der Geraden mit Gleichung  $y = x - 2$ .

### Aufgabe 11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in den Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Abhängigkeit vom Parameter  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ty + z &= 1 \\tx + ty + z &= 1 + t.\end{aligned}$$

### Aufgabe 12

Sei  $L = \{(2, 1, 7) + t(0, 6, 4) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ . Bestimmen Sie die Schnittpunkte von  $L$  mit der  $xy$ -Ebene, der  $xz$ -Ebene und der  $yz$ -Ebene.

### Aufgabe 13

Sei  $E$  die Ebene im  $\mathbb{R}^3$  durch  $\mathbf{x}_1 = (-1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$  und  $\mathbf{x}_3 = (2, 2, -6)$ . Liegt  $\mathbf{z} = (-2, 4, 3)$  in  $E$ ?

### Aufgabe 14

Welche Eckpunkte besitzt das Dreieck, welches durch Spiegelung an der Ebene  $x + y + 2z - 1 = 0$  aus dem Dreieck mit den Eckpunkten  $(1, 2, 3)$ ,  $(-1, 0, 2)$  und  $(1, 2, -1)$  hervorgeht?