Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 1

(Die beiden letzten Teile dieser Aufgabe setzen Wissen über Logarithmen und trigonometrische Funktionen aus der Schule voraus, welches im Vorkurs noch nicht wiederholt wurde.)

Für welche Werte der Variablen sind folgende Ausdrücke definiert? Vereinfachen Sie die Ausdrücke - ändert sich dadurch der Definitionsbereich?

(a) $\frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{2+\sqrt{x}}$

(b) $\frac{x}{\frac{1}{x+y}} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{-y}{x+y} \cdot \left(-1 - \frac{y}{x}\right)$

(c) $1 + \frac{(\cos a - 1)(\cos a + 1)}{(\tan a)^2}$

(d) $\frac{xa}{1-\frac{b}{a}} - ae^{2\ln b} \cdot \frac{x(2-\frac{b}{a})}{ab-b^2}$

Aufgabe 2

Sind die folgenden Umformungen Äquivalenzumformungen? Falls nein, wie ändert sich die Lösungsmenge?

(a) Man quadriert beide Seiten in der Gleichung $|x-1| = \sqrt{x+1}$.

(b) Man ersetzt in der Gleichung $x^2 + 2x + 4 = 0$ jedes x durch $(1+x)$.

(c) Man multipliziert beide Seiten der Ungleichung $x^2 - 2 \leq 3x + 1$ mit $(1-x)$.

Aufgabe 3

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x - 7 = 4x + 3$

(b) $x^2 + x - 2 = 0$

(c) $4\sqrt{y+3} - \frac{3y}{\sqrt{y+3}} = 0$

(d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x}$

(e) $|x-1| + |x+3| = 4$

(f) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$

Aufgabe 4

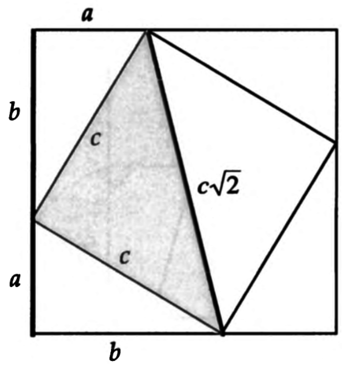
Beweisen Sie die p-q-Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für allgemeine reelle Zahlen p und q mittels quadratischen Ergänzens.

Aufgabe 5

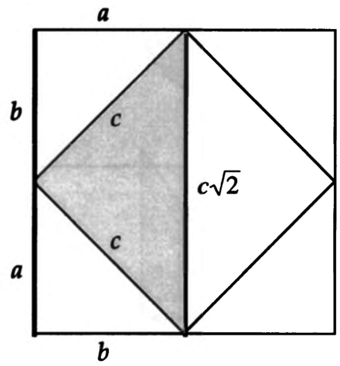
Es seien a, b und c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei c die längste Seite ist. Dann gilt

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

und $a + b = c\sqrt{2}$ genau dann, wenn $a = b$. *Wieso ist das so?* Das soll die untenstehende Skizze beantworten. Können Sie diesen Beweis erklären?



$a + b \leq c\sqrt{2}$



$a + b = c\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b$

Aufgabe 6
Wo steckt der Fehler bei folgender Argumentation?

> Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen, welche $a = b$ erfüllen. Dann folgt
>
> $$\begin{aligned} ab &= a^2 \\ ab - b^2 &= a^2 - b^2 \\ b(a-b) &= (a+b)(a-b) \\ b &= a+b \\ b &= 2b \\ 1 &= 2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7
Finden Sie alle Lösungen der folgenden Ungleichungen.

(a) $x - 2 \leq 2x - 4$

(b) $(x+1)^2 - 6x \geq 6$

(c) $\big||x+2| - |x-2|\big| \leq 1 + |x|$

(d) $\frac{3x+2}{2x+3} > 1$

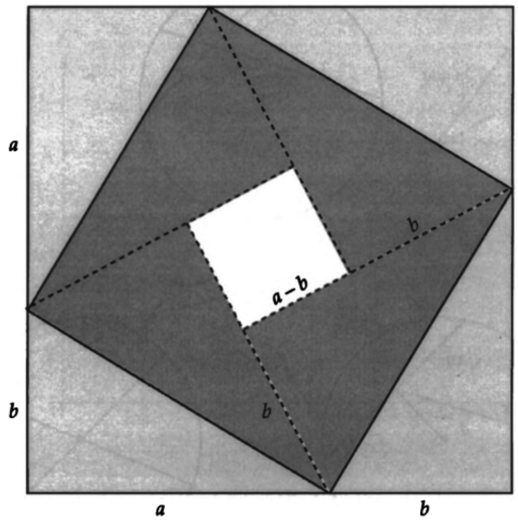
Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ gilt. Können Sie diese Formel auch geometrisch interpretieren?

Aufgabe 9
Für zwei positive relle Zahlen a und b ist das arithmetische Mittel definiert als $(a+b)/2$

und das geometrische Mittel definiert als $\sqrt{ab}$. Es gilt folgende Ungleichung:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Die Skizze soll das beweisen. Können Sie den Beweis erklären?



Aufgabe 10

(Diese Aufgabe setzt Wissen über Logarithmen aus der Schule voraus, welches im Vorkurs noch nicht wiederholt wurde.)

Es soll die Lösungsmenge der Gleichung $2\log u = 2$ bestimmt werden. Dabei bezeichnet log den Logarithmus zur Basis 10. Ist die untenstehende Lösung korrekt? Oder gibt es Fehler, und wenn ja, wo steckt das Problem?

$$\begin{aligned} 2\log u &= 2 \\ \log u^2 &= 2 \\ u^2 &= 10^2 \\ u_{1,2} &= \pm 10\,. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge der Gleichung $2\log u = 2$ die Menge $\{-10, 10\}$.