

Elementares Rechnen

Aufgabe 1

Multiplizieren Sie die dreifache Summe der Zahlen $1\frac{2}{9}$ und $1\frac{2}{5}$ mit der halben Differenz der Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{16}{59}$.

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $(2x + 3)(3x - 4) - (6x + 1)(x + 2)$

(b) $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$

(c) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}$

(d) $\frac{a+1}{a} - \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$

Aufgabe 3

Schreiben Sie folgende Ausdrücke ohne Summen- und Produktzeichen und vereinfachen Sie soweit möglich

(a) $\sum_{i=0}^3 i$

(b) $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i}$

(c) $\prod_{i=2}^4 i^2$

(d) $\prod_{i=1}^6 x^2$

Aufgabe 4

Es seien r und s ganze Zahlen, welche größer als null sind.

(a) Überzeugen Sie sich, dass

$$\min\{r, s\} + \max\{r, s\} = r + s.$$

(b) Wie könnte ein formaler Beweis dafür aussehen?

(c) Gilt die Aussage auch allgemeiner?

Aufgabe 5

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 1234 und 432 ohne Taschenrechner.

Aufgabe 6 (a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl x gilt: $x^3 - x$ ist durch 3 teilbar, und $x^5 - x$ ist durch 5 teilbar. Können Sie diese Aussage verallgemeinern: Ist $x^n - x$ durch n teilbar?

(b) Zeigen Sie, dass $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 7

Welche Tripel natürlicher Zahlen $a < b < c$ erfüllen

$$\text{ggT}(a, b, c) = 60 \quad \text{und} \quad \text{kgV}(a, b, c) = 2520?$$

Aufgabe 8

Begründen Sie, dass für jede Primzahl $p > 3$ die Zahl $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.