Vorkurs Mathematik
Woche 3

September 2016

Janko Latschev und Immanuel van Santen

Inhaltsverzeichnis

1 Beweismethoden

Beweise sind das Rückgrat der Mathematik. Mit Hilfe von Beweisen überzeugen wir uns und andere, dass unsere Behauptungen „wahr“ und unsere Lösungen für Probleme richtig und vollständig sind. Es ist übrigens wichtig, zu bemerken, dass diese „Wahrheit“ etwas weniger absolut ist, als in der Schule typischerweise thematisiert wird. Jede mathematische Theorie ist auf gewisse Grundannahmen, meist *Axiome* genannt, angewiesen, die als Voraussetzungen für alle folgenden Aussagen dienen, aus denen die Theorie also entwickelt wird, und die selbst nicht bewiesen werden. Für den üblichen Umgang mit Zahlen und daraus entwickelten Konzepten ist das recht allgemein akzeptierte Axiomsystem das sogenannte „ZFC“ – die Axiome der Mengenlehre nach *Zermelo* und *Frenkel* einschließlich des sogenannten *Auswahlaxioms („axiom of choice“)*. Es war zunächst ein Schock, als Gödel 1931 bewiesen hat, dass man ausgehend von jedem halbwegs interessanten Axiomsystem Aussagen finden kann, die *mit diesen Grundannahmen weder beweisbar noch widerlegbar sind*. Auch kann man für die meisten Axiomsysteme die *Widerspruchsfreiheit der Axiome* innerhalb des Systems selbst nicht beweisen. Beide Aussagen treffen auf „ZFC“ zu, trotzdem hatten sie für die praktische Entwicklung der Mathematik erstaunlich geringe Bedeutung. Die meisten Mathematiker und Mathematikerinnen gehen davon aus, dass das Axiomsystem „ZFC“ widerspruchsfrei ist, oder arbeiten zumindest so, als ob es das wäre.

Ein Beweis einer mathematischen Aussage (eines Satzes) beginnt also bei als wahr bekannten Aussagen (Axiomen oder bereits aus ihnen abgeleiteten Feststellungen) und formuliert eine Folge von korrekten Schlussfolgerungen, an deren Ende die Wahrheit der neu behaupteten Aussage steht. Die Aussagen, die man beweisen will sind meist in der Form „wenn A, dann B“ gegeben. Allerdings ist A manchmal nicht explizit formuliert, sondern aus dem Kontext zu erschließen. Häufig findet man auch Aussagen der Form „A genau dann, wenn B“, welche man dann oft (aber nicht immer!) in die beiden Teilaussagen „aus A folgt B“ und „aus B folgt A“ zerlegt.

Ein mathematischer Satz sollte grundsätzlich erst dann als wahr angenommen werden, wenn er bewiesen ist[1]. Es ist besser, man gewöhnt sich diese „Berufsethik“ schon bei einfachsten Aussagen an, denn bei komplizierterern Aussagen ist schnell tatsächlich nicht mehr „klar“, ob sie nun wahr oder falsch sind, und nur ein Beweis einer der beiden Alternativen kann hier Gewissheit bringen. Erfahrungsgemäß tut man sich als Anfänger relativ schwer, präsentierte Beweise zu verstehen oder selbstständig Beweise zu führen. Dies mag auch daran liegen, dass es meist *nicht die eine richtige Lösung* gibt, wenn es

[1] In diesem Vorkurs sind viele Beweise nur angedeutet oder werden ganz ausgelassen. Gründe dafür sind sowohl Zeitmangel als auch manchmal fehlende Diskussion der Grundlagen, welche für einen echten Beweis notwendig wären, wie zum Beispiel eine fundierte Einführung der reellen Zahlen. Im Studium wird dies anders sein.

um Beweise geht.

Beispiel 1. Wir werden zur Illustration drei Beweise der Aussage *„Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.“* geben.

Beweis 1. Ist n ungerade, so gibt es eine natürliche Zahl k, so dass $n = 2k - 1$. Dann gilt jedoch

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1,$$

so dass auch n^2 ungerade ist. $\square$

Beweis 2. Wir beweisen: *Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.*
Ist n^2 gerade, so ist 2 ein Primfaktor von $n^2 = n \cdot n$. Da die Primfaktorzerlegung eindeutig ist, tritt jeder Primfaktor von n^2 bereits in der Primfaktorzerlegung von n auf, so dass 2 auch ein Primfaktor von n ist. Also ist n gerade. $\square$

Beweis 3. Ist n ungerade, so ist 2 kein Primfaktor von n. Ist n^2 gerade, so ist 2 aber ein Primfaktor von n^2, also auch ein Primfaktor von n. Dieser Widerspruch zeigt, dass nicht gleichzeitig n ungerade und n^2 gerade sein können, und somit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Einen Beweis zu finden ist ein kreativer Prozess, dessen Erfolg stark vom individuellen Vorwissen abhängt. Je mehr wahre Aussagen, je mehr Möglichkeiten der Umformulierung der gegebenen Voraussetzungen und Behauptungen und je mehr prinzipielle Beweisstrategien wir kennen, um so eher werden wir ans Ziel gelangen. In diesem Kapitel geht es in erster Linie darum, einige wichtige Beweistechniken vorzustellen, die häufig Anwendung in der Mathematik finden. Das soll dazu dienen, ein besseres Verständnis für die „Anatomie“ von Beweisen zu entwickeln, damit man Beweise besser lesen kann, aber auch besser selbst Beweise führen kann.

Zur Formulierung von Beweisen gilt: je einfacher ein Beweis ist und je leichter er zu verstehen ist, desto besser. Wenn ein Sachverhalt leichter mit einem deutschen Satz als mit einer Formel ausgedrückt werden kann, dann sollte man das auch tun. Manchmal kann es auch sinnvoll sein, eine Formel zusätzlich noch in Worten auszudrücken.

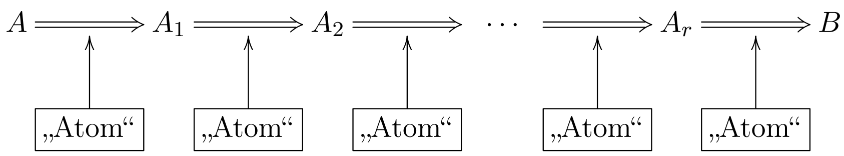
Die Auflistung der Beweismethoden in diesem Kapitel ist bei weitem nicht vollständig. Alle existierenden Beweismethoden aufzulisten ist praktisch nicht möglich. Außerdem sei angemerkt, dass mathematische Beweise häufig eine bunte Mischung verschiedener Methoden enthalten. Oft ist es so, dass man den Beweis einer Aussage in mehrere Teilschritte zerlegt, und es ist völlig normal, dass für die verschiedenen Teilschritte unterschiedliche Methoden verwendet werden.

Dieses Kapitel hat viele Anregungen und Beispiele aus Houstons Buch [Hou12] übernommen.

1.1 Direkter Beweis

Der direkte Beweis ist die konzeptuell einfachste Beweisform. Um die Aussage „aus A folgt B“ zu zeigen, geht man hier von der Aussage A aus und leitet durch logische

Schlussfolgerungen (d.h. mit Hilfe von als wahr bekannten Implikationen) die Aussage B her. Um also direkt zu beweisen, dass B aus A folgt, zeigt man, dass A_1 aus A folgt, dass A_2 aus A_1 folgt, dass A_3 aus A_2 folgt uns so weiter, bis schliesslich aus einem gewissen A_r dann B folgt. Die einzelnen Teilschritte sollten dann offensichtlich sein, es sollten also keine großen, schwer nachvollziebaren Gedankensprünge notwendig sein. Diese Teilschritte, kann man dann sozusagen als „Atome“ auffassen.



Wir haben bereits einige direkte Beweise gesehen - auch der erste Beweis aus dem Beispiel 1 war ein direkter Beweis. Wir wollen nun noch einige weitere Beispiele von Aussagen, die direkt bewiesen werden können, betrachten.

Beispiele für direkte Beweise

Satz. $\sum_{i=n}^{n+4} i$ *ist durch* 5 *teilbar.*

Dieser Satz ist zunächst nicht in der Form $A \implies B$ formuliert. Nachdem die Summe aber nur für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, könnte man ihn zu „Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ...“ umformulieren, die Aussage A steckt somit implizit in der Formulierung der Aussage B. Präziser könnte man also diesen Satz wie folgt formulieren, und damit ist dann offensichtlich, was die Aussage A ist und was die Aussage B ist.

Satz. *Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist* $\sum_{i=n}^{n+4} i$ *durch* 5 *teilbar.*

Beweis. Wir schreiben die Summe aus und formen um:

$$\sum_{i=n}^{n+4} i = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2).$$

Da $\sum_{i=n}^{n+4} i$ eine Darstellung als $5k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ hat, muss es durch 5 teilbar sein. □

Satz. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$. Falls n durch k teilbar ist, dann ist $n + 1$ nicht durch k teilbar.*

Die Aussage A besteht in diesem Satz aus mehreren Teilaussagen, und zwar ist A die durch „und“ verknüpfte Aussage der Aussagen „$k \in \mathbb{N}$“, „$n \in \mathbb{N}$“, „$k > 1$“ und „k teilt n“. Die Aussage B ist „$n + 1$ ist nicht durch k teilbar.“

Beweis. Da k ein Teiler von n ist, gibt es eine ganze Zahl q mit $n = qk$. Somit ist aber $n + 1 = qk + 1$, und da $0 \leq 1 < k$ gilt, ist dies das eindeutige Ergebnis der Division mit Rest von $n + 1$ durch k. Insbesondere ist der Rest $r = 1$ verschieden von 0, so dass $n + 1$ nicht durch k teilbar ist. □

Im nächsten Beispiel wollen wir uns nicht nur den Beweis anschauen, sonder auch die (möglichen) Denkvorgänge, welche zu einem Beweis führen können.

Satz. *Es sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p^2 \in \mathbb{Z}$. Dann ist auch $p \in \mathbb{Z}$.*

Was sind die Voraussetzungen, was ist also die Aussage A? Die Aussage A ist „$p \in \mathbb{Q}$ und $p^2 \in \mathbb{Z}$“. Die Schlussfolgerung, also die Aussage B, ist „$p \in \mathbb{Z}$“. Bis jetzt haben wir noch nicht so viele Sätze über die rationalen Zahlen kennengelernt. Eigentlich haben wir bis jetzt nur die Definition kennengelernt, welche besagt, dass $p = \frac{a}{b}$ für ganze Zahlen a und b. Wir können annehmen, dass dieser Bruch so weit wie möglich gekürzt ist. Die zweite Voraussetzung besagt, dass $p^2 \in \mathbb{Z}$. Demnach ist also $(\frac{a}{b})^2 \in \mathbb{Z}$ und damit $\frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$. Dieser Bruch ist ebenfalls gekürzt, und dies ist nur möglich, wenn $b^2 = 1$. Man erhält $b = \pm 1$. Also sieht man, dass $p = \frac{a}{\pm 1} = \pm a \in \mathbb{Z}$ sein muss.

Das sind nun die Gedanken, mit welchen wir aus der Aussage A die Aussage B gefolgert haben. Wenn man die eigenen Gedanken aufgeschrieben hat, muss man diese noch einmal durchgehen, damit man dann zu einem sauberen Beweis kommt.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $p = \frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und b, wobei dieser Bruch gekürzt sei. Es folgt $p^2 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$. Da $p^2 \in \mathbb{Z}$ und dieser Bruch ebenfalls gekürzt ist, muss $b^2 = 1$ sein. Demnach gilt $b = \pm 1$, womit wir $p = \frac{a}{\pm 1} = \pm a \in \mathbb{Z}$ erhalten. □

Bemerkung 2. Ein häufiger Anfängerfehler in direkten Beweisen ist es, mit der Behauptung zu beginnen und so lange umzuformen, bis man auf eine wahre Aussage kommt. *Dies beweist leider gar nichts!* Wie wir im Kapitel über Logik gesehen haben, kann man aus einer falschen Aussage *jede Aussage* folgern, also auch jede wahre Aussage. Nur aus der Tatsache, dass aus der Behauptung etwas Wahres folgt, lässt sich also gar nichts über diese Behauptung selbst ableiten.

Beweis einer Gleichung

Es gibt ganz verschiedene Methoden eine Gleichung zu beweisen. Ein guter Ansatz ist, mit der schwierigeren Seite zu beginnen und solange umzuformen, bis man zur einfacheren Seite gelangt.

Beispiel 3. Wir wollen (für $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$) die Gleichung

$$\frac{1}{\tan^2(x) + 1} = \cos^2(x)$$

beweisen. Die kompliziertere Seite ist offenbar die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan^2(x)+1} &= \frac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1} && \text{nach Definition des Tangens}\\
&= \frac{1}{\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} && \text{weil } \sin^2(x)+\cos^2(x)=1\\
&= \cos^2(x) && \text{solange } \cos^2(x)\neq 0, \text{ d.h. } \cos(x)\neq 0.
\end{aligned}$$

Es gibt auch andere Methoden, eine Gleichung zu beweisen. Je nach Situation nutzt man zum Beispiel manchmal eine der folgenden Äquivalenzen:

- $x = y \iff x - y = 0$.
- $x = y \iff (x \leq y \text{ und } x \geq y)$.
- $x = y \iff (x = z \text{ und } z = y)$.

Die letzten beiden Methoden haben den Vorteil gegenüber einem direkten Beweis, dass man die Aussage in zwei getrennte Teilaussagen zerlegt hat, welche eventuell für sich genommen jeweils einfacher zu beweisen sind.

Beweis einer Äquivalenz

Wie schon in der Einleitung erwähnt, kann man eine Aussage der Form „A genau dann, wenn B“ beweisen, indem man die Implikationen „aus A folgt B“ und „aus B folgt A“ beweist. Wir betrachten ein Beispiel.

Satz. *Sei n eine natürliche Zahl größer 1. Die Zahl n ist eine Primzahl genau dann, wenn für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $n = ab$ gilt, dass $a = n$ oder $b = n$.*

Proof. Beweis Die Aussage hat die Form $A \iff B$, wobei $A =$„n ist eine Primzahl“ und $B =$„für jede Darstellung $n = ab$ von n als Produkt von zwei natürlichen Zahlen a und b gilt $a = n$ oder $b = n$. Wir wollen nun einen Beweis finden, indem wir jede Richtung einzeln betrachten. Wir beginnen mit dem „genau dann“-Teil, also der Richtung $A \implies B$. Wir müssen also zu natürlichen Zahlen a und b mit $n = ab$ zeigen, dass $a = n$ oder $b = n$ gilt. Da aber n eine Primzahl ist und a, b Teiler von n sind, muss $a = n$ und $b = 1$ oder $a = 1$ und $b = n$ gelten. Dies beweist die Richtung $A \implies B$.
Jetzt wollen wir den „wenn“-Teil, also die Richtung $A \Longleftarrow B$ beweisen. Wir betrachten einen beliebigen Teiler a von n, was bedeutet, dass es eine natürliche Zahl b gibt, so dass $n = ab$. Nach Voraussetzung gilt dann entweder $a = n$ (und $b = 1$) oder $b = n$ (und $a = 1$). Wir sehen also, dass unser „beliebiger“ Teiler a nur die Werte n oder 1 annehmen kann. Zusammen mit der Bedingung $n > 1$, welche wir sowieso voraussetzen, ist dies gerade die Definition dafür, dass n eine Primzahl ist. Wir haben also die Richtung $A \Longleftarrow B$ bewiesen. □

Zum Abschluss halten wir hier noch einige Bemerkungen fest.

- Man kann eine Aussage der Form „A genau dann, wenn B“ auch direkt beweisen, indem man die Äquivalenz $A \iff B$ in kleine Teilschritte

$$A \iff A_1 \iff A_2 \iff \cdots \iff A_r \iff B$$

zerlegt. Wie bei den Gleichunge empfiehlt es sich auch hier, mit der komplizierteren der beiden Aussagen A oder B zu beginnen und dann zur einfacheren zu gelangen.

- Eine weitere Strategie für Äquivalenzbeweise ist, statt $A \iff B$ die beiden Teilaussagen $A \implies B$ und $(\neg A) \implies (\neg B)$ zu beweisen. Dies werden wir bei der Diskussion des Beweises durch Kontraposition noch einmal näher erläutern.

- Ist die Äquivalenz mehrerer Aussagen zu zeigen, kann es effizient sein, diese „in einem Ring“ anzuordnen. Um zum Beispiel die Äquivalenz von drei Aussagen, also

$$A \iff B \iff C$$

zu beweisen, kann man versuchen, die drei Implikationen

$$A \implies B \implies C \implies A$$

zu zeigen, denn die Verknüpfung zweier dieser Implikationen ergibt jeweils die Umkehrung der dritten. Je mehr Aussagen in der Liste vorkommen, um so effizienter wird dieses Verfahren, da man für die Äquivalenz von $n+1$ Aussagen bestenfalls statt $2n$ Implikationen (für n Äquivalenzen) nur noch $n+1$ Implikationen beweisen muss.

Beweise von Aussagen mit Mengen

Häufig wird man mit dem Problem konfrontiert von zwei Mengen zu beweisen, dass eine der Menge in der anderen enthalten ist, oder dass beide Mengen gleich sind.

Es seien A und B zwei Mengen. Wenn wir zeigen wollen, dass $A \subseteq B$ gilt, dann müssen wir beweisen, dass für *jedes* $a \in A$ auch $a \in B$ gilt. Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Satz. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und A, B seien Teilmengen von X. Dann gilt $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.*

Beweis. Wir starten also mit einem Element $y \in f(A \cup B)$. Nach Definition gibt es ein $x \in A \cup B$, so dass $f(x) = y$. Da $x \in A \cup B$ folgt $x \in A$ oder $x \in B$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x \in A$ gilt. Also folgt $y = f(x) \in f(A)$ und damit haben wir $y \in f(A) \cup f(B)$ gezeigt. □

Um zu zeigen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, empfiehlt es sich zu zeigen, dass $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Beide dieser Teilaussagen können dann mit obiger Methode einzeln bewiesen werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.)

Im Beweis unseres letzten Satzes haben wir „ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen“, dass x in A liegt. Oft wird „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ mit o.B.d.A. abgekürzt. Was bedeutet dieses „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ hier und in anderen Beweisen?

Diese Floskel wird verwendet, wenn eine Voraussetzung eingeführt wird, aufgrund derer die neue Aussage wie eine Spezialisierung *aussieht*, es aber tatsächlich nicht ist. Es wird also der bisherige Grad an Allgemeinheit erhalten. Man muss sich aber bei jedem Auftauchen eines o.B.d.A. überlegen, ob zusätzliche Annahme wirklich so harmlos war, d.h. ob die allgemeine Aussage tatsächlich aus dem bewiesenen Spezialfall folgt.

In unserem Beweis, wussten wir, das $x \in A$ oder $x \in B$ gilt. Wir haben dann o.B.d.A. $x \in A$ angenommen. Wenn aber $x \in B$ gewesen wäre, so hätte man einfach die Mengen A und B vertauschen können, und hätte dasselbe beweisen können. Die Aussage in unserem Satz bleibt nämlich gleich, wenn die Mengen A und B vertauscht werden.

In diesem konkreten Beispiel wäre es nicht wesentlich länger, für die Leser aber einfacher gewesen, wenn man statt „o.B.d.A. ist $x \in A$“ zu verwenden die beiden Fälle $x \in A$ und $x \in B$ nacheinander betrachtet hätte. Wenn man aber den folgenden allgemeineren Satz beweisen will, so wird man lieber „o.B.d.A.“ eine Annahme machen als alle Fälle aufzulisten.

Satz. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann gilt $f(\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.* □

1.2 Beweis durch Fallunterscheidungen

Beim Beweis durch Fallunterscheidung, zerlegt man die Aussage $A \implies B$ in mehrere Teilaussagen. Zuerst wird die Aussage A in endlich viele Fälle zerlegt („Wenn A gilt, dann gilt entweder A_1, oder A_2, oder... oder A_r“). Danach wird in jedem dieser Fälle die Gültigkeit von B bewiesen (also $A_1 \implies B$, $A_2 \implies B$, ..., $A_r \implies B$). Insgesamt haben wir also bewiesen, dass, wenn A gilt, auch mindestens eine der Aussagen A_1, A_2, ..., A_r und somit auch B gelten muss. In Formeln ausgedrückt, verläuft ein Beweis durch Fallunterscheidungen wie folgt:

$$A \implies A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cdots \vee A_r \implies B$$

Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Satz. *Für jede natürliche Zahl n ist 3 ein Teiler von $n(n^2-1)$.*

Beweis. Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann lässt n bei Division durch 3 entweder 0, oder 1, oder 2 Rest, also entweder $n = 3k$, oder $n = 3k+1$, oder $n = 3k+2$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}_0$. Wir werden in jedem dieser Fälle zeigen, dass 3 ein Teiler von $n(n^2-1)$ ist.

- Falls $n = 3k$ ist, dann ist $n(n^2-1) = 3k(9k^2-1) = 3r$ für $r = k(9k^2-1)$. Somit ist 3 ein Teiler.

- Falls $n = 3k+1$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} n(n^2-1) &= (3k+1)((3k+1)^2-1) \\ &= (3k+1)(9k^2+6k+1-1) \\ &= (3k+1)(9k^2+6k) \\ &= 3(3k+1)(3k^2+2k), \end{aligned}$$

  und wiederum ist $n(n^2-1)$ durch 3 teilbar.

- Falls $n = 3k+2$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} n(n^2-1) &= (3k+2)((3k+2)^2-1) \\ &= (3k+2)(9k^2+12k+4-1) \\ &= (3k+2)(9k^2+12k+3) \\ &= 3(3k+2)(3k^2+4k+1). \end{aligned}$$

  Auch in diesem Fall ist $n(n^2-1)$ durch 3 teilbar.

Somit haben wir für alle auftretenden Fälle gezeigt, dass $n(n^2-1)$ durch 3 teilbar ist. Das beweist den Satz. □

Ein Beweis durch Fallunterscheidung ist vergleichsweise fehleranfällig, da man geneigt ist, einen unangehmen Fall zu übersehen. Es lohnt sich also, selbst wenn man einen richtigen Beweis durch Fallunterscheidung gefunden hat, noch einmal zu überlegen, ob man nicht einen etwas konzeptionelleren Beweis ohne Fallunterscheidung findet. Im obigen Fall würde folgende Alternative wohl von den meisten Mathematikerinnen und Mathematikern als „besser“ angesehen werden, weil sie kürzer ist und den „Grund“ für die Richtigkeit der Aussage besser erklärt.

Alternativer Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n^2-1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ das Produkt dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen. Da aber zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von 3 nur zwei andere ganze Zahlen liegen, muss einer der drei Faktoren durch 3 teilbar sein. Also ist auch das Produkt durch 3 teilbar. □

Wir wollen noch einen zweiten Beweis geben, bei dem eine Fallunterscheidung nützlich ist.

Satz. *Für jedes ebene Dreieck ist der Flächeninhalt gleich der Hälfte des Produktes einer Seitenlänge mit der dazugehöhrenden Höhe.*

Beweis. Die Behauptung lautet für ein Dreieck, dass wie in Abbildung 1.1 aussieht, dass der Flächeninhalt sich als $\frac{ch}{2}$ berechnen lässt. Typischerweise führt man die Aussage nun auf die einfachere Aussage für rechtwinklige Dreiecke zurück.
Behauptung: *Die Aussage des Satzes gilt für den Fall, dass wir eine der beiden kürzeren Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck betrachten.*

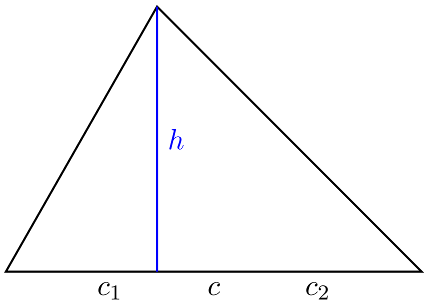
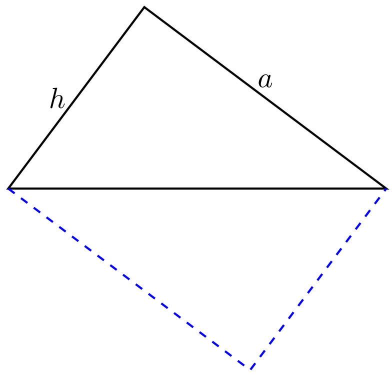


Abbildung 1.1: Ein Dreieck mit eingezeichneter Höhe.



Um diesen Spezialfall zu beweisen, betrachten wir die folgende Skizze eines rechtwinkligen Dreiecks.

Aus der (als bekannt angenommenen) Tatsache, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks das Produkt der Seitenlängen ist, sowie der Tatsache, dass die Diagonale ein Rechteck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, erkennen wir sofort die Wahrheit der Behauptung.
Wir können nun diesen Spezialfall auf die beiden rechtwinkligen Teildreiecke unseres ursprünglichen Dreiecks anwenden, und erhalten als Flächeninhalte $\frac{c_1 \cdot h}{2}$ und $\frac{c_2 \cdot h}{2}$. Da die Summe dieser beiden Flächeninhalte der Gesamtflächeninhalt ist, und andererseits die Summe der Seitenlängen c_1 und c_2 gerade die Seitenlänge c unseres Anfangsdreiecks, folgt hieraus die Behauptung des Satzes *für Dreiecke wie das in der Abbildung 1.1 gezeichnete.* Ist der Satz nun bereits bewiesen? Nun, die Frage lautet: „sieht jedes Dreieck so aus wie das in Abbildung 1.1?“, und die Antwort ist „nein“:

In einem stumpfwinkligen Dreieck zerlegt die Höhe unser Dreieck nicht unbedingt in zwei rechtwinklige Dreiecke, so dass die Argumentation wie oben nicht zulässig ist. Allerdings kann man diesen Fall leicht retten, denn hier können wir unser gegebenes Dreieck als *Differenz* zweier rechtwinkliger Dreiecke auffassen, wobei das kleinere die Kathetenlängen h und c_1 und das größere die Kathetenlängen h und $c_1 + c$ besitzt (siehe Abbildung 1.2). Nun erhalten wir für unseren Flächeninhalt

$$A = \frac{(c + c_1)h}{2} - \frac{c_1 h}{2} = \frac{ch}{2},$$

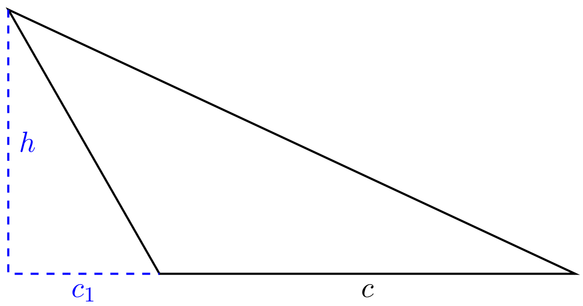


Abbildung 1.2: Ein stumpfwinkliges Dreieck

d.h. die Aussage folgt auch in diesem Fall. □

Bemerkung 4. Oft treten in Beweisen Fallunterscheidungen auf, bei denen es einen „Standardfall“ sowie gewisse „Spezialfälle“ gibt, welche separat behandelt werden. Ein typisches Beispiel hatten wir schon bei Äquivalenzumformungen von Gleichungen gesehen: wenn mit Termen multipliziert wird, in denen noch Variablen vorkommen, muss separat der Fall betrachtet werden, in dem der verwendete Faktor gleich 0 ist.

1.3 Beweis durch Widerspruch

Der Beweis durch Widerspruch ist eine der interessantesten Beweistechniken in der Mathematik. Um die Aussage „aus A folgt B“ zu beweisen gehen wir hierbei von der Negation der Aussage, beziehungsweise von der zu dieser Negation äquivalenten Aussage „A und nicht B“ aus und zeigen, dass daraus eine falsche Aussage (ein Widerspruch) folgt. Da aber aus einer wahren Aussage keine falsche Aussage folgen kann, muss die Negation von „aus A folgt B“ falsch sein, also ist „aus A folgt B“ selbst wahr. Man geht also bei einem Widerspruchsbeweis wie folgt vor:

$$A \wedge \neg B \implies C_1 \implies C_2 \implies \dots \implies C_r \implies \lightning$$

Wir haben einen solchen Beweis auch schon angetroffen, als wir gezeigt haben, dass es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist. Auch der dritte Beweis in Beispiel 1 war ein Widerspruchsbeweis. Wir geben nun noch ein weiteres Beispiel.

Satz. *Die Gleichung* $2x^2 + 2x - 1 = 2y^2$ *hat keine ganzzahligen Lösungen.*

Beweis. Wir nehmen umgekehrt an, dass ganze Zahlen x und y existieren, so dass $2x^2 + 2x - 1 = 2y^2$. In diesem Fall ist aber die rechte Seite der Gleichung eine gerade Zahl, während die linke Seite eine ungerade Zahl ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war, d.h. ganzzahlige Lösungen der Gleichung existieren nicht. □

Wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, konnten wir die Nichtexistenz einer gewissen Lösung mittels eines Widerspruchsbeweises zeigen. Auch die Irrationalität von $\sqrt{2}$ wurde durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt. Genau genommen haben wir hier die

Nichtexistenz eine rationalen Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ gezeigt. Ganz allgemein ist es empfehlenswert einen Widerspruchsbeweis zu versuchen, wenn man zeigen muss, dass etwas nicht existiert. Es ist oft einfacher von etwas auszugehen, dass existiert (wie zum Beispiel einer ganzzahligen Lösung von $2x^2 + 2x - 1 = 2y^2$ oder einem Bruch $\frac{a}{b}$, so dass $(\frac{a}{b})^2 = 2$) und dies dann auf einen Widerspruch zu führen, als direkt die Nichtexistenz zu zeigen.

Noch einen Hinweis, wie man einen Widerspruchsbeweis sauber aufschreibt:

(i) Erklären Sie, dass Sie die Negation der Behauptung annehmen. Erfahrene Leserinnen und Leser erkennen dann, dass ein Beweis durch Widerspruch folgen soll.

(ii) Formulieren Sie diese Negation explizit.

(iii) Ziehen Sie Folgerungen daraus, bis Sie zu einem Widerspruch kommen.

(iv) Erklären Sie, dass ein Widerspruch aufgetreten ist, und worin genau dieser besteht.

1.4 Beweis durch Kontraposition

Die Kontraposition einer Implikation „aus A folgt B" haben wir schon kennnengelernt: es ist die Aussage „wenn B nicht gilt, so gilt auch A nicht". Wir haben auch gesehen, dass die Äquivalenz dieser beiden Aussagen eine Tautologie ist, d.h. sie gilt unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Aussagen A und B *immer*. Um also „aus A folgt B" zu beweisen, können wir stattdessen „aus $(\neg B)$ folgt $(\neg A)$" beweisen. Unser zweiter Beweis in Beispiel 1 war von dieser Form. Wir wollen nun ein weiteres Beispiel zu dieser Beweismethode betrachten.

Satz. *Sind a und b positive reelle Zahlen und ist $a < b$, so gilt $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b-a}$.*

Wir wollen also zeigen, dass die Aussage „a und b sind positive reelle Zahlen mit $a < b$" die Aussage „$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b-a}$" impliziert. Die erste Aussage scheint weniger kompliziert als die zweite Aussage zu sein, (was auch auf die Negationen der Aussagen zutrifft). Wir haben schon gesehen, dass es beim Beweis einer Gleichung günstig ist mit der komplizierteren Seite der Gleichung zu beginnen, um dann auf die einfachere Seite zu kommen. Analog ist es auch bei einem Beweis oft einfacher, von einer komplizierteren Aussage durch logische Schlüsse zu einer einfacheren zu kommen. Aus diesem Grund bietet sich für den Beweis unseres Satzes ein Beweis durch Kontraposition an, da wir dann von der Negation der zweiten Aussage (kompliziert) zur Negation der ersten Aussage (weniger kompliziert) kommen müssen.

Beweis. Es seien a und b positive reelle Zahlen. Wir nehmen an, dass $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \geq \sqrt[3]{b-a}$, und können dann folgende Kette äquivalenter Ungleichungen finden:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} &\geq \sqrt[3]{b-a} && \text{(zu dritten Potenzen übergehen } (x \mapsto x^3 \text{ ist monoton))} \\
b - 3\sqrt[3]{b^2 a} + 3\sqrt[3]{ba^2} - a &\geq b - a && (+(a-b)) \\
-3\sqrt[3]{b^2 a} + 3\sqrt[3]{ba^2} &\geq 0 && (+3\sqrt[3]{b^2 a}) \\
3\sqrt[3]{ba^2} &\geq 3\sqrt[3]{b^2 a} && \text{(durch 3 dividieren)} \\
\sqrt[3]{ba^2} &\geq \sqrt[3]{b^2 a} && \text{(zu dritten Potenzen übergehen)} \\
ba^2 &\geq ab^2 && \text{(durch } ab \text{ dividieren (möglich, da } a, b > 0)) \\
a &\geq b
\end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass aus $a < b$ die Ungleichung $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b-a}$ folgt. □

Wenn wir nun mit der Aussage „$a < b$“ gestartet hätten und dies direkt zu $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b-a}$ hätten umformen wollen, wäre uns dies wohl schwerer gefallen. Wie hätte man zum Beispiel zu $\sqrt[3]{b-a}$ kommen können? Beim gewählten Weg im Beweis ist es wohl ziemlich einleuchtend, dass man durch Übergang zu dritten Potenzen versucht, die Wurzeln aufzulösen, und dann weiter umformt.

Der Beweis durch Widerspruch ist dem Beweis durch Kontraposition sehr ähnlich. Tatsächlich kann jeder Beweis durch Kontraposition auch als Beweis durch Widerspruch geschrieben werden:

> Anstatt $(\neg B) \implies (\neg A)$ zu zeigen, kann man $A \wedge \neg B$ annehmen, dann aus $\neg B$ die Aussage $\neg A$ folgern und somit die widersprüchliche Aussage $A \wedge \neg A$ erhalten.

Dadurch enthält der Beweis allerdings unnötige Beweisschritte, was ihn unter Umständen schwerer verständlich macht. Deshalb ist es bei einem Widerspruchsbeweis häufig sinnvoll zu überprüfen, ob man ihn nicht besser als Beweis durch Kontraposition formulieren könnte.

Beweis einer Äquivalenz

Um eine Äquivalenz „A genau dann, wenn B“ zu beweisen, kann es manchmal hilfereich sein, statt „aus A folgt B“ und „aus B folgt A“ die beiden Aussagen „aus A folgt B“ und „aus $(\neg A)$ folgt $(\neg B)$“ zu zeigen. Da die zweite Aussage die Kontraposition von „aus B folgt A“ ist, ist damit die Äquivalenz ebenfalls bewiesen. Konkret betrachten wir noch einmal die Aussage aus Beispiel 1, und präzisieren diese zu einer Äquivalenz.

Satz. *Eine natürliche Zahl n ist genau dann ungerade, wenn n^2 ungerade ist.*

Beweis. Wir hatten bereits bewiesen, dass n^2 ungerade ist, falls n ungerade ist. Für die Umkehrung zeigen wir die Kontraposition: *Ist n gerade, so ist auch n^2 gerade.* Dies ist in der Tat nicht schwer: Ist n gerade, so ist 2 ein Primfaktor von n, und somit ist 2 auch ein Primfaktor von $n^2 = n \cdot n$, d.h. n^2 ist ebenfalls gerade. □

Bemerkung 5. Vergleichen Sie diesen Beweis noch einmal mit dem zweiten Beweis in Beispiel 1. Dort hatten wir die Kontraposition benutzt, um die ursprüngliche Aussage zu zeigen.

1.5 Beweis durch vollständige Induktion

Vollständige Induktion ist eine Beweistechnik mit deren Hilfe man Aussagen über alle natürliche Zahlen (oder allgemeiner Mengen von Objekten, die durch die natürlichen Zahlen indiziert werden) beweisen kann. Sie basiert auf den fundamentalen Eigenschaften der natürlichen Zahlen, wie sie in *Peanos Axiomen* formalisiert werden:

Definition (Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen)**.** Die *natürlichen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit einer Abbildung $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und einem ausgezeichnetem Element $1 \in \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaften haben:

(P1) Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ folgt aus $s(x) = s(y)$ auch $x = y$.

(P2) Es existiert kein $x \in \mathbb{N}$ mit $s(x) = 1$.

(P3) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit den beiden Eigenschaften

  (a) $1 \in A$, und

  (b) für alle $a \in A$ ist auch $s(a) \in A$,

  dann gilt $A = \mathbb{N}$.

Alle anderen Eigenschaften der natürlichen Zahlen lassen sich aus diesen Axiomen herleiten. Man kann insbesondere Addition und Multiplikation definieren und aus der Definition und den Axiomen deren übliche Eigenschaften nachweisen.

Die Abbildung s formalisiert die Bildung des Nachfolgers (Englisch *successor*) Wir schreiben daher für $s(x)$ auch $x+1$, und benutzen auch weiter die üblichen Bezeichnungen $2 = s(1)$, $3 = s(2)$ etc.

Axiom (P1) sagt aus, dass verschiedene natürliche Zahlen auch verschiedene Nachfolger haben, und Axiom (P2) sagt, dass 1 nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. Das letzte Axiom nennt man *Induktionsaxiom.* Es besagt, dass man durch Zählen (d.h. man beginnt mit 1 und betrachtet in jedem Schritt den Nachfolger) *jede* natürlichen Zahl erreicht.

Direkt aus diesem Axiom kann man folgende Beweismethode ableiten.

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $A(k)$ eine Aussage. Es gelte*

(i) $A(1)$ ist wahr und

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt aus der Gültigkeit von $A(i)$ für $1 \leq i \leq k$ die Gültigkeit von $A(k+1)$.

Dann ist $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ die Teilmenge aller natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, so dass die Aussagen $A(1)$, $A(2)$,..., $A(n-1)$ und $A(n)$ wahr ist. Nach Voraussetzung (i) enthält M das Element $1 \in \mathbb{N}$. Sei nun k ein Element von M. Dann folgt aus Voraussetzung (ii), dass auch $k+1 = s(k)$ in M ist. Nun folgt aus dem Induktionsaxiom (P3), dass $M = \mathbb{N}$ gelten muss, d.h. insbesondere gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

In einem Beweis einer Aussage vom Typ „$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, A(n)$" nach diesem Prinzip geht man wie folgt vor:

- Man beweist die Richtigkeit von $A(1)$ (dies nennt man *Induktionsanfang* oder *Induktionsverankerung*)

- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ beweist man unter Verwendung der Aussage $A(k)$ oder mehrerer Aussagen $A(j)$ mit $1 \leq j \leq k$ die Aussage $A(k+1)$. Hier nennt man die verwendeten Aussagen die *Induktionsvoraussetzung* und die neue Aussage $A(k+1)$ die *Induktionsbehauptung*. Diesen Teil des Beweises nennt man den *Induktionsschritt.*

- Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun die Behauptung
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, A(n).$$

Hier sind drei Beispiele von Aussagen, die wir mittels vollständiger Induktion beweisen werden:

- Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Ausdruck $5^k + 7$ durch 4 teilbar.

- Es gilt $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- Die Ungleichung $2^{k-1} \leq k!$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wenn man eine mathematische Aussage sieht, sollte man als Mathematikerin oder Mathematiker den Reflex haben, sofort einmal zu prüfen, ob die Aussage plausibel ist. Hier bietet es sich an, die Aussage für einige natürliche Zahlen zu testen. Wir wollen dies beispielhaft für die erste Behauptung tun:

$$\begin{array}{rll}
k=1: & 5^1 + 7 = 12\,, & \text{ist teilbar durch 4.} \\
k=2: & 5^2 + 7 = 32\,, & \text{ist teilbar durch 4.} \\
k=3: & 5^3 + 7 = 132\,, & \text{ist teilbar durch 4.} \\
k=10: & 5^{10} + 7 = 9765625 + 7 = 9765600 + 32\,, & \text{ist teilbar durch 4.}
\end{array}$$

Dies gibt also eine gewisse Plausibilität, dass die Aussage wahr ist (aber noch lange keinen Beweis; selbst wenn wir dies für *sehr viele* Beispiele testen würden).

Wie auch eingangs gemacht, werden wir für die Aussage, die wie beweisen wollen $A(k)$ schreiben. In diesem Beispiel ist also $A(k)$ die Aussage „$5^k + 7$ ist durch 4 teilbar".

Kommen wir nun zu den Beweisen unserer Beispielaussagen.

Satz. *Sei $n = 5^k + 7$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist n durch 4 teilbar.*

Beweis. Wir wollen für alle $k \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$A(k) = \text{„}5^k + 7 \text{ ist durch 4 teilbar“}$$

mittels vollständiger Induktion beweisen.

1. Der Induktionsanfang ist einfach. Wie wir schon gesehen haben ist für $k = 1$ die Zahl $n = 5^1 + 7 = 12$ durch 4 teilbar, also ist $A(1)$ wahr.

2. Für den Induktionsschritt fixieren wir $k \in \mathbb{N}$ und nehmen an, dass die Aussage $A(k)$ wahr ist, dass also $5^k + 7 = 4r$ für ein geeignetes $r \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 7 &= 5 \cdot 5^k + 7 \\ &= (4+1) \cdot 5^k + 7 \\ &= 4 \cdot 5^k + 5^k + 7 \end{aligned}$$

Wir wissen nach Induktionsvoraussetzung, dass $5^k + 7 = 4r$. Nun können wir weiterumformen

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5^k + 5^k + 7 &= 4 \cdot 5^k + 4r \\ &= 4(5^k + r). \end{aligned}$$

Diese Zahl ist offensichtlich durch 4 teilbar.

Somit haben wir gezeigt, dass $A(1)$ wahr ist und, dass auch $A(k) \implies A(k+1)$ wahr ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir also $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bewiesen. □

Bemerkung 6. Die Idee des Beweises war, den Ausdruck $5^{k+1} + 7$ als Summe zu schreiben, wo einer der Summanden $5^k + 7$ ist. Auf diesen Summanden konnten wir dann die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Satz. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Beweis. Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion nach k. Unsere Aussage $A(k)$ ist also die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

1. Für den Induktionsanfang betrachten wir $k = 1$. Die Aussage $A(1)$ lautet

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2},$$

was eine wahre Aussage ist. Also ist der Induktionsanfang bewiesen.

2. Für den Induktionsschritt fixieren wir $k \in \mathbb{N}$ und nehmen an, dass die Aussage $A(k)$ stimmt, dass also $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) && \text{(Definition der Summe)} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Also habe wir gezeigt, das für alle natürlichen $k \in \mathbb{N}$ aus $A(k)$ auch $A(k+1)$ folgt. Zusammen mit dem Induktionsanfang beweist das nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$ $\square$

Bemerkung 7. Auch in diesem Beweis war die Idee den Ausdruck $\sum_{i=1}^{k+1} i$ in zwei Summanden zu schreiben, wovon der eine gerade $\sum_{i=1}^{k} i$ ist, und dann auf diesen die Induktionsvoraussetzung anzuweden. Hier noch eine Warnung zu diesem Vorgehen: Wir setzten *nicht* voraus, dass der Fall $A(k+1)$ ebenfalls gilt (das also $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ in unserem Beispiel), sondern wir *beweisen*, dass $A(k+1)$ wahr ist, *falls* $A(k)$ gilt. Dieser Fehler, davon auszugehen, dass $A(k+1)$ wahr ist, wird oft von Anfängern begangen.

Kommen wir noch zum Beweis unserer letzten Beispielaussage.

Satz. *Für alle* $k \in \mathbb{N}$ *gilt die Ungleichung* $2^{k-1} \leq k!$.

Beweis. Wir wollen für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$A(k) = „2^{k-1} \leq k!“$$

mittels vollständiger Induktion beweisen.

1. Für den Induktionsanfang nehmen wir $k = 1$ an. Damit erhalten wir

$$2^{1-1} = 2^0 = 1 \leq 1!$$

was eine wahre Aussage ist, also ist $A(1)$ bewiesen.

2. Für den Induktionsschritt fixieren wir $k \in \mathbb{N}$ und nehmen an, dass die Aussage

$A(k)$ stimmt, dass also $2^{k-1} \leq k!$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)-1} &= 2^k \\
&= 2(2^{k-1}) \\
&\leq 2(k!) && \text{(Induktionsannahme)} \\
&\leq (k+1)k! && \text{(da } 2 \leq k+1\text{)} \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

Damit haben wir für alle k die Implikation $A(k) \implies A(k+1)$ gezeigt. Zusammen mit der Wahrheit von $A(1)$ beweist dies nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Ungleichung $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ $\square$

Wie schon eingangs erwähnt, empfiehlt es sich oft, mittels vollständiger Induktion zu argumentieren, wenn man eine Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$ beweisen muss, wenn also in der zu beweisenden Aussage etwas der Form „Für jede natürliche Zahl..." oder „...für alle $k \in \mathbb{N}$" steht. Manchmal geschieht dies auch versteckt. Wenn man zum Beispiel beweisen soll:

„Die Zahl $n^2 - 1$ ist durch 8 teilbar, falls n eine ungerade natürliche Zahl ist.",

so sieht dies auf den ersten Blick nicht nach einer Aussage aus, welche durch die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ indiziert ist, weil ja die geraden Zahlen ausgeschlossen werden. Jedoch lassen sich die ungeraden und die natürlichen Zahlen einander zuordnen: 1 ist die *erste* ungerade Zahl, 3 ist die *zweite* ungerade Zahl, usw. Man kann die Aussage also umformulieren zu einer Aussage, welche durch die natürlichen Zahlen indiziert wird:

„Die Zahl $(2k-1)^2 - 1$ ist durch 8 teilbar ist, falls k eine natürliche Zahl ist."

Allerdings gibt es auch Aussagen über natürliche Zahlen (so wie zum Beispiel die gerade erwähnte Behauptung), für die es direkte Beweise gibt, welche kürzer als ein Induktionsbeweis sind.

Wir haben bisher nur die einfachste Variante des Induktionsbeweises gesehen. Tatsächlich ist diese Beweismethode sehr vielseitig. Man kann damit zum Beispiel auch Aussagen des folgenden Typs zeigen:

Satz. *Für jedes $n \geq 3$ lässt sich jedes ebene n-Eck in $n-2$ Dreiecke zerlegen.*

Beweis. Wenn man nur an *konvexe* n-Ecke denkt, so hat man schnell einen relativ einfachen Beweis vor Augen.

Man verbindet eine Ecke mit allen anderen Eckpunkten, und erhält so die gewünschte Zerlegung. Allerdings wird die Sache schwieriger, wenn das n-Eck nicht konvex ist. Hier gibt es nicht unbedingt eine Ecke, von der aus alle Diagonalen innerhalb des n-Ecks liegen. Allerdings behaupten wir, dass es stets mindestens *eine* solche Diagonale gibt[2]

Diese Aussage benutzen wir nun für einen Induktionsbeweis. Für $n = 3$ ist die Behauptung des Satzes trivial. Wir nehmen nun als Induktionsvoraussetzung an, dass die

[2] Ein exakter Beweis dieser Aussage ist nicht ganz trivial – probieren Sie es einmal!

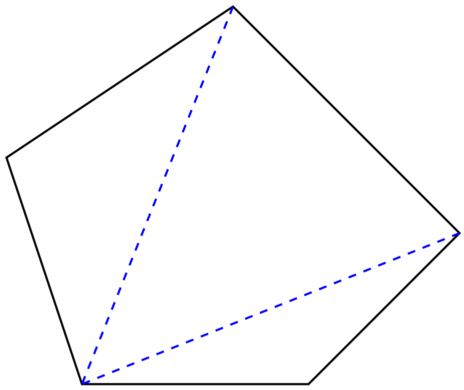


Abbildung 1.3: Ein konvexes Fünfeck mit einer Zerlegung in drei Dreiecke.

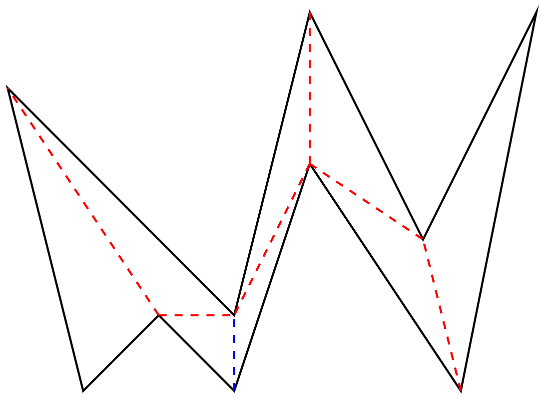


Abbildung 1.4: Ein Zehneck, welches nicht alle seine Diagonalen enthält. Die blaue Diagonale zerlegt es aber beispielsweise in ein Fünfeck und ein Siebeneck.

Aussage für alle $3 \leq j \leq n-1$ gilt, und betrachten ein beliebiges n-Eck. Darin wählen wir eine Diagonale, die vollständig darin enthalten ist. Diese zerlegt das gegebene n-Eck in zwei kleinere Figuren mit $n_1 \geq 3$ und $n_2 \geq 3$ Ecken, wobei $n_1 + n_2 = n + 2$, denn die Endpunkte der Diagonale werden in beiden Figuren benutzt. Insbesondere gilt $n_1 < n$ und $n_2 < n$. Nach Induktionsvoraussetzung kann man nun diese beiden Figuren auf die gewünschte Art in $n_1 - 2$ bzw. $n_2 - 2$ Dreiecke zerlegen. Zusammengenommen geben diese Dreiecke unsere gewünschte Zerlegung des ursprünglichen n-Ecks in

$$n_1 - 2 + n_2 - 2 = n + 2 - 2 - 2 = n - 2$$

Dreiecke. $\square$

1.6 Die Rolle von Beispielen und Gegenbeispielen

Beispiele und Gegenbeispiele stellen nur in Ausnahmefällen einen Beweis dar.

Beispiele

Die Angabe *eines Beispiels* ist nur dann ein gültiger Beweis, wenn es um eine Existenzaussage geht. In allen anderen Fällen können Beispiele zwar keinen Beweis liefern, sie können aber dabei helfen, einen wirklichen Beweis *zu finden.*

Um eine Idee für einen Beweis einer Aussage zu erhalten (oder auch nur um ein Gefühl für die Aussage zu bekommen), ist es meist hilfreich, sich Beispiele zu überlegen. Mit etwas Glück kann man dann mit Hilfe eines oder mehrerer Beispiele eine Beweisidee erraten.

Deshalb ist es wichtig, dass man für mathematische Begriffe oder Aussagen immer ein Beispiel parat hat. Nachfolgend eine kleine Auswahl von Beispielen zu mathematischen Begriffen und Aussagen aus diesem Vorkurs:

- Beispiele für unendliche Mengen: die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{P}$, die Menge der Primzahlen.
- Beispiel für eine Primzahlzerlegung: $12 = 3 \cdot 2^2$.
- Beispiele für Funktionen: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$ oder $f(x) = x^2$.

Wir wollen nun —als Beispiel— folgende konkrete Aussage beweisen:

> „Falls A eine unendliche Menge ist, dann gibt es eine Injektion von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nach A.“

Um eine Idee zu bekommen, betrachten wir also zunächst Beispiele für unenendliche Mengen. Nehmen wir also zum Beispiel $A = \mathbb{N}$. Dann können wir leicht durch $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$ eine Injektion angeben. Auch wenn wir als Beispiel $A = \mathbb{Z}$ wählen, können wir wieder leicht eine Injektion angeben: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$. Wie steht es nun aber, wenn $A = \mathbb{P}$? Wir können mit 2 anfangen, dann die nächste Primzahl nehmen, also 3 und so weiter, das hört nie auf, weil es ja unendlich viele Primzahlen gibt. Auf diese Art und Weise kann man eine Injektion $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ konstruieren.

Funktioniert dieser Beweis vielleicht ganz allgemein? Nun, falls A eine beliebige unendliche Menge ist, dann gibt es sicher ein Element in A – nennen wir es a_1. Weil A unendlich ist, finden wir auch ein Element in $A \setminus \{a_1\}$, nennen wir es a_2. Induktiv können wir nun annehmen, dass wir schon paarweise verschiedene Elemente

$$a_1 \,, a_2 \,, \ldots \,, a_n$$

aus A gefunden haben. Weil A unendlich ist, gibt es ein Element in $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, nennen wir es a_{n+1}. Induktiv, haben wir nun eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen

$$a_1 \,, a_2 \,, \ldots$$

gefunden und könenn nun durch $f\colon \mathbb{N} \to A$, $f(n) = a_n$ eine Injektion angeben.

Auch im nächsten Beispiel, wollen wir anhand eines Spezialfalles einen allgemeinen Beweis finden. Wie man im Beispiel sieht, kann das manchmal ganz leicht gehen.

Beispiel 8. Um zu beweisen, dass für alle Primzahlen p die Gleichung $x^2 = p$ keine rationale Lösung hat, verallgemeinern wir den Beweis im Spezialfall $p = 2$.

Es sei also p eine Primzahl. Wie im Falle $p = 2$ wollen wir einen Widerspruchsbeweis durchführen. Wir nehmen also an, dass ein $x = \frac{a}{b}$ (mit teilerfremden ganze Zahlen a und b) existiert, so dass $x^2 = p$. Es folgt dann

$$a^2 = p \cdot b^2 \, .$$

Also muss a^2 durch p teilbar sein und somit auch a durch p teilbar sein, weil p eine Primzahl ist. Es gibt also eine ganze Zahl r, so dass $a = p \cdot r$ und es folgt $p \cdot b^2 = a^2 = p^2 \cdot r^2$ beziehungsweise

$$b^2 = p \cdot r^2 \, .$$

Das bedeutet aber —analog zu eben— dass b durch p teilbar ist. Dies widerspricht nun aber der Annahme, dass a und b teilerfremd sind.

Bemerkung 9. Wir betonen noch einmal: wenn man eine Aussage beweisen will, dann reicht es (außer bei Existenzbehauptungen) nicht aus, eines oder mehrere Beispiele anzugeben, in denen die Aussage wahr ist. Die Beispiele können nur dabei helfen, einen Beweis zu finden, ersetzen diesen aber nicht!

Gegenbeispiele

Ein Gegenbeispiel in der Mathematik ist ein Beispiel, das zeigt, dass eine bestimmte Aussage falsch ist. Es heisst *Gegen*beispiel, weil es „gegen" eine Aussage gerichtet ist; es zeigt, dass deren *Gegenteil* wahr ist.

Ein einziges Gegenbeispiel kann also dazu benutzt werden, die Falschheit einer Aussage zu zeigen. Dies ist insbesondere bei $\forall$-Aussagen der Fall. Findet man keinen Beweis für eine solche Aussage, dann kann es also sinnvoll sein, nach einem Gegenbeispiel zu suchen. Falls eines existiert, dann ist die Aussage nämlich falsch und alle Versuche, sie zu beweisen sind zum Scheitern verurteilt.

Beispiele 10.

- Um die Aussage „Alle Schafe sind weiß" zu widerlegen, genügt es, ein einziges Schaf zu finden, das nicht weiß ist. So ein Schaf wäre ein Gegenbeispiel zu der Aussage.
- Der Satz „Je zwei Geraden in der euklidischen Ebene schneiden sich in einem Punkt." ist falsch, wie man anhand des Gegenbeispiels zweier paralleler Geraden sehen kann.
- Die Aussage „Alle Primzahlen sind ungerade" ist falsch, weil 2 ein Gegenbeispiel ist.
- Betrachten wir die Aussage „Es seien p und q reelle Zahlen. Falls $p/q \in \mathbb{Q}$, dann gilt auch $p \in \mathbb{Q}$ und $q \in \mathbb{Q}$.". Diese Aussage könnte auf den ersten Blick vernünftig aussehen. Wenn wir jedoch $p = \sqrt{2}/3$ und $q = \sqrt{2}/2$ setzen, dann erhalten wir $p/q = 2/3 \in \mathbb{Q}$, aber p und q sind reelle Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, weil $\sqrt{2}$

nicht rational ist. Also bilden $p = \sqrt{2}/3$ und $q = \sqrt{2}/2$ ein Gegenbeispiel zu obiger Aussage.

Vorsicht: nur weil wir kein Gegenbeispiel finden, bedeutet das nicht, dass eine Aussage wahr sein muss.

Bemerkung 11. Auch um eine als wahr bekannte Aussage besser zu verstehen, kann es hilfreich sein zu versuchen, ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Man wird dann kein solches Gegenbeispiel finden können, bekommt aber oft ein besseres Gefühl dafür, was die Aussage genau bedeutet, weil man eventuell bei solchen Versuchen versteht, warum das vermeintliche Gegenbeispiel nicht konstruierbar ist. Bestenfalls erhält man so sogar eine Idee für einen Beweis der Aussage.

1.7 Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel einige wichtige Beweismethoden vorgestellt. Da man bei der Suche nach einem Beweis nie ganz sicher sein kann, welche Methode erfolgreich sein wird, ist es oft hilfreich, zu Beginn verschiedene Umformulierungen der zu beweisenden Aussage parat zu haben. Für eine Implikation „$A \implies B$“ kann man stattdessen zunächst „$\neg A \vee B$“ oder die Kontraposition „$\neg B \implies \neg A$“ betrachten. Da beide Aussagen äquivalent zur ursprünglichen Aussage sind, können wir, wenn es einfacher erscheint, auch eine dieser beiden Aussagen beweisen.

Bei der Suche nach einem Beweis ist prinzipiell alles erlaubt. Oft lohnt es sich, sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung mehrfach umzuformen, bis man die erhaltenen Aussagen miteinander in Beziehung setzen kann. *Beim Aufschreiben eines Beweises ist es dann aber wichtig, in der richtigen Richtung zu argumentieren.* Hier sollte bei jeder Implikation wirklich von einer Voraussetzung auf eine *daraus folgende* Behauptung geschlossen werden. Auch darf man *nie von der Behauptung ausgehen*, wenn man einen Beweis aufschreibt.

2 Differentialrechnung

2.1 Tangenten und die Definition der Differenzierbarkeit

Für eine „hinreichend glatte“ Kurve kann man in jedem Punkt eine Tangente zeichnen.

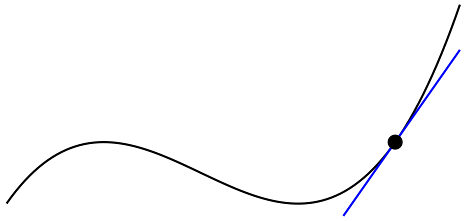


Abbildung 2.1: Tangente an eine Kurve in einem Punkt

Damit ist oft die Vorstellung verbunden, dass diese Tangente zumindest lokal die gegebene Kurve nur in einem Punkt berührt. Wie man schon bei der Betrachtung von Geraden sieht, ist diese Vorstellung etwas zu naiv, denn für diese ist die Tangente in jedem Punkt die Gerade selbst. Dies mag man noch als unwesentlichen Sonderfall abtun, aber was macht man aus folgendem Beispiel?

Beispiel 12. Wir betrachten den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die noch zu formulierende Definition der Tangente an den Graphen von f liefert für $x = 0$ die Gerade $y = 0$, d.h. die x-Achse, welche den Graphen in jedem noch so kleinen Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ unendlich oft schneidet.

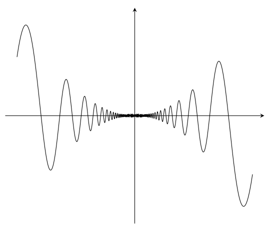


Abbildung 2.2: Die Tangente an den Graphen von f im Nullpunkt ist die x-Achse.

Wie kann man nun also Tangenten formalisieren? Tatsächlich ist die übliche Heuristik für Tangenten recht gut, wenn man sie nur zu Ende denkt und das Ergebnis, so ungewohnt es aus der Schulperspektive in manchen Fällen auch sein mag, akzeptiert. Um eine Tangente zu approximieren betrachten wir üblicherweise Sekanten. Ist die betrachtete Kurve der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so erhalten wir die Parameterform der Geradengleichung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ als

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0)) \end{cases}$$

Eliminieren wir den Parameter t, so erhalten wir hieraus die parameterfreie Geradengleichung

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Die Steigung ist also gerade der *Differenzenquotient*

$$\Delta f(x_0, x_1) := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Nun *definiert* man einfach die Eigenschaft „hinreichend glatt" für eine Kurve dadurch, dass man die Existenz des Grenzwertes der Differenzenquotienten verlangt.

Definition. Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in (a, b)$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \Delta f(x_0, x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man bezeichnet diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennt ihn die *Ableitung* von f in x_0.

Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ mennt man die *Tangente* an den Graphen $\operatorname{graph}(f)$ der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

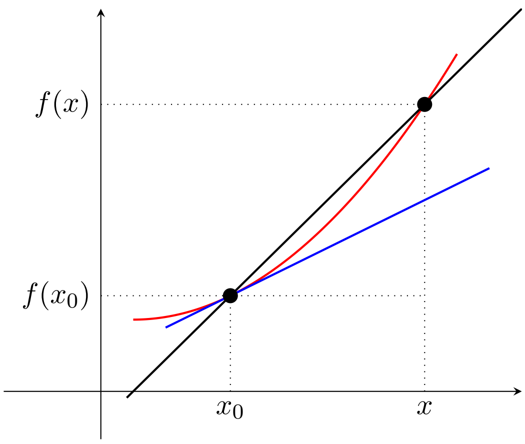


Abbildung 2.3: Beim Grenzübergang $x \to x_0$ wird die Sekante zur Tangente

Bemerkung 13. Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, so ist die Funktion $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gerade diejenige *lineare Funktion*, welche f in der Nähe von x_0 am besten approximiert. Es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0, \tag{2.1}$$

und man kann zeigen, dass es höchstens eine lineare Funktion geben kann, für welche (2.1) gilt. In der Tat ist die Existenz einer solchen Funktion gerade äquivalent zur Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0.

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 wird oft auch als

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

geschrieben. Das ist mittels der Substitution $h = x - x_0$ äquivalent zur obigen Definition: $x - x_0$ konvergiert nämlich genau dann gegen 0, wenn x gegen x_0 konvergiert.

Man kann die Definition benutzen, um die Ableitungen einiger elementarer Funktionen zu berechnen.

Beispiel 14. Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konstant, d.h. $f(x) = c$ für alle $x \in (a, b)$ und ein $c \in \mathbb{R}$, so sind alle Differenzenquotienten

$$\Delta f(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

so dass die Ableitung in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ existiert und gleich 0 ist.

Beispiel 15. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 + x - 1$ an der Stelle $x_0 = 1$. Die folgende Tabelle enthält die Werte einiger Differenzenquotienten:

x	2	1.5	1.25	1.125	1.0625
$\Delta f(x_0, x)$	4	3.5	3.25	3.125	3.0625

Es liegt also die Vermutung nahe, dass die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert 3 annimmt. Tatsächlich können wir den Wert der Ableitung auch berechnen:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 2) = 3$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Funktion $g(x) = x + 2$ stetig ist und somit $\lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$ ist. Somit ist $f(x)$ in $x = 1$ differenzierbar mit $f'(1) = 3$

Bemerkung 16. Bei der Berechnung der Ableitung von f an der Stelle 1, sind wir davon ausgegangen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existiert und haben dann Umformungen gemacht, bis wir bei einer konkreten Zahl gelandet sind. Streng genommen ist dieser Schluss nicht korrekt. Man sieht aber leicht, wenn man bei dem Resultat, nämlich der 3 gestartet wäre, und dann sukzessive umgeformt hätte, dann wäre man korrekterweise bei dem Grenzwert $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ gelandet und hätte damit dessen Existenz mitbewiesen. Da wir aber in obiger Rechnung auch zeigen wollten, wie man auf das Resultat kommt, haben wir uns für obige (nicht ganz saubere) Variante entschieden. Wenn wir im Folgenden weitere Ableitungen berechnen werden, werden wir immer wie im obigen Beweis vorgehen und überlassen es dem Leser, die Existenz der Grenzwerte im Umkehrschluss zu überprüfen.

Beispiel 17. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. Falls f in 0 differenzierbar wäre, so müsste für jede gegen 0 konvergente Folge x_n die Folge $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$ gegen die Ableitung in 0 konvergieren. Um zu zeigen, dass $f(x)$ nicht differenzierbar ist genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden, also eine gegen 0 konvergente Folge, sodass die zugehörige Folge von Differenzenquotienten nicht konvergiert.

Wir betrachten die Folge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, die offensichtlich gegen 0 konvergiert.

- Für gerades n ist $(-1)^n = 1$, somit ist x_n positiv, somit ist $f(x_n) = |x_n| = x_n$ und $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{x_n}{x_n} = 1$.
- Falls n ungerade ist, dann ist x_n negativ. Also ist $f(x_n) = |x_n| = -x_n$ und $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{-x_n}{x_n} = -1$.

Die Folge $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$ ist also die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben und diese Folge konvergiert nicht.

2.2 Ableitungen elementarer Funktionen

Beispiel 18. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x_0 und versuchen, die Ableitung zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} (x+x_0) \\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Funktion $g(x) = x + x_0$ stetig ist und somit $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 2x_0$ gilt.

Obiges Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz 19. *Wenn $f(x) = x^n$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$, dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Man kann diesen Satz problemlos mit einer Verallgemeinerung des gerade präsentierten Beweises für $n = 2$ zeigen. Mit den später diskutierten allgemeinen Rechenregeln erhält man auch alternative Beweise, so dass wir hier auf den Beweis verzichten.

Die folgende Tabelle enthält die Ableitungen einiger weiterer elementarer Funktionen. Um diese Ableitungen direkt aus der Definition zu bestimmen, fehlen uns einige technische Hilfsmittel die zu weit auf die Analysis vorgreifen würden. Daher begnügen wir uns an dieser Stelle damit, die Ableitungen ohne Herleitung anzugeben. Im nächsten Abschnitt werden wir dann sehen, wie wir aus den hier zusammengefassten Ableitungen die Ableitungen anderer Funktionen (z.B. Polynome, allgemeinere Exponentialfunktionen und Logarithmen, Tangens und Kotangens) bestimmen können.

Funktion	Ableitung	Bemerkung
e^x	e^x	Exponentialfunktionen mit anderer Basis folgen im nächsten Abschnitt
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	Gilt für $x \neq 0$. Logarithmen mit anderer Basis im nächsten Abschnitt
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	

Bemerkung 20. Da wir anstatt $\ln x$ die Funktion $\ln|x|$ betrachten, können wir den Definitionsbereich auf negative Zahlen ausweiten. Nur im Punkt $x = 0$ ist diese Funktion nicht definiert.

2.3 Stetigkeit von differenzierbaren Abbildungen

Bevor wir zu Differentiationsregeln und Anwendungen kommen, wollen wir zunächst noch beweisen, dass die Differenzierbakeit einer Funktion in einem bestimmten Punkt die Stetigkeit in diesem Punkt impliziert. Da wir momentan nicht viel mehr als die Definitionen haben, werden wir mit diesen argumentieren.

Satz 21. *Wenn eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist, dann ist sie in x_0 auch stetig.*

Beweis. Da nach Voraussetzung der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert und nach Definition gerade gleich $f'(x_0)$ ist, können wir mit unseren Grenzwertsätzen Folgendes schließen:

$$\begin{aligned}
0 &= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} (x-x_0)\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) \\
&= \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - f(x_0)
\end{aligned}$$

Dies beweist die Stetigkeit von f in x_0. □

2.4 Differentiationsregeln

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Rechenregeln für Ableitungen. Da die Ableitung durch einen Grenzwert definiert ist, ist es sinnvoll, sich zuerst nochmals die Rechenregeln für Grenzwerte (Satz **??**) ins Gedächtnis zu rufen.

Faktor- und Summenregel

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Ableitungen von Funktionen der Form $f+g$ bzw. $c \cdot f$, wobei f, g differenzierbare Funktionen sind und c eine reelle Konstante ist.

Satz 22 (Faktor- und Summenregel)**.** *Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. *$c \cdot f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $c \cdot f'$,*
2. *$f + g : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $f' + g'$.*

Beweis. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir direkt:

$$\begin{aligned}(c \cdot f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= c \cdot \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= c \cdot (f'(x_0)),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= (f' + g')(x_0).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 23. Die Summenregel gilt auch für eine beliebige (endliche) Anzahl an Summanden. Das lässt sich leicht mit der Assoziativität der Addition begründen.

Beispiel 24. Sei $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}f' &= (x^3 + 2x + 1)' \\ &= (x^3)' + (2x)' + (1)' && \text{(Summenregel)} \\ &= 3x^2 + 2(x)' + 0 && \text{(Faktorregel für den 2. Summanden)} \\ &= 3x^2 + 2\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt schon, wie man ganz allgemein die Ableitungen von Polynomen bestimmen kann. Ein Polynom vom Grad d ist eine Funktion der folgenden Form (wobei die a_i reelle Konstanten sind):

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i.$$

Um die Ableitung zu bestimmen, wenden wir zuerst die Summenregel und dann auf jeden Summanden die Faktorregel an und erhalten

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i x^i\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{d} \left(a_i x^i\right)' && \text{(Summenregel)} \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i \left(x^i\right)' && \text{(Faktorregel für jeden Summanden)} \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i i x^{i-1}
\end{aligned}$$

Beispiel 25. Die Ableitung des Polynoms

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 2$$

ist

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x - 1 + 2 \cdot 0 = 8x^3 + 9x^2 - 4x - 1.$$

Neben Polynomfunktionen kann man auch Logarithmen zu einer beliebigen Basis $a \neq 1$ mithilfe der Faktorregel ableiten. Wir erinnern uns daran, dass Logarithmen bezüglich verschiedener Basen mittels der Formel

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

ineinander umgerechnet werden können. Da wir wissen, dass $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $\ln(x)$ ist, können wir für $f(x) = \log_a(x)$ die Ableitung berechnen als

$$f'(x) = \log_a'(x) = \left(\frac{1}{\ln(a)} \ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln(a)} (\ln(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Produktregel

Satz 26 (Produktregel)**.** *Sind $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, dann ist auch $f \cdot g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'g + g'f$,* *Beweis.* Wir setzen wieder direkt in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}.$$

Wir addieren $0 = f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0)$ im Zähler:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0)}{x - x_0}.$$

Geeignetes Zusammenfassen der Terme und Aufspalten des Grenzwertes in eine Summe von Grenzwerten ergibt

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}. \\
&= \lim_{x \to x_0} f(x) \frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} g(x_0) \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Wir spalten beide Grenzwerte weiter auf. Beim ersten Grenzwert müssen wir beachten, dass $f(x)$ keine Konstante ist, deshalb müssen wir den Grenzwert des Produktes als Produkt von Grenzwerten schreiben. Die Stetigkeit von f und die Definition der Ableitung gibt schließlich das gewünschte Ergebnis.

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + g(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 27. Die Faktorregel ist ein Spezialfall der Produktregel. Da wir aus dem vorigen Abschnitt wissen, dass die Ableitung einer konstanten Funktion $g(x) = c$ die Nullfunktion ist, erhalten wir aus der Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f = c \cdot f' + 0 \cdot f = c \cdot f'.$$

Beispiel 28. Wir berechnen die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \cdot x^3$:

$$\begin{aligned}
f' &= (x^2)' \cdot (x^3) + (x^3)' \cdot (x^2) \\
&= 2x \cdot x^3 + 3x^2 \cdot x^2 \\
&= 2x^4 + 3x^4 \\
&= 5x^4.
\end{aligned}$$

Das stimmt auch damit überein, dass $x^2 \cdot x^3 = x^5$ und nach der Regel für Ableitungen von Potezfunktionen $f'(x) = 5x^4$ ist.

Beispiel 29. Gesucht ist die Ableitung von $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$. Mit Hilfe der Produktregel berechnen wir diese Ableitung als

$$f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{1}{x}\sin(x).$$

Kettenregel

Die Kettenregel beschreibt die Ableitung einer Verknüpfung von differenzierbaren Funktionen.

Satz 30 (Kettenregel)**.** *Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : (c,d) \to (a,b)$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch $f \circ g : (c,d) \to \mathbb{R}$, gegeben als $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ differenzierbar. Die Ableitung ist $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$, an einer Stelle x_0 ist der Wert der Ableitung also gegeben durch $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.*

Der Beweis erfolgt wie schon bei der Produktregel durch geschicktes Umformen des Differentialquotienten.

Im Rest dieses Abschnitts betrachten wir einige Anwendungen der Kettenregel.

Ableitungen von Exponentialfunktionen

Eine einfache Anwendung der Kettenregel erlaubt es uns, Ableitungen beliebiger Exponentialfunktionen zu finden. Wir erinnern uns daran, dass $a^x = e^{\ln(a)x}$ für $a > 0$ und beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir wollen nun die Funktion $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = a^x$ differenzieren (wobei $a > 0$ eine reelle Konstante ist). Wir schreiben zuerst

$$a^x = e^{\ln(a)x} = f(g(x))$$

für $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(a)x$. Wir bestimmen also

$$f'(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\ln(a)x} = a^x$$

und

$$g'(x) = \ln(a).$$

Nach der Kettenregel ist also

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = \ln(a) \cdot a^x.$$

Ableitungen von Potenzfunktionen

Mit Hilfe der Kettenregel können wir die Ableitung einer beliebigen Potenzfunktion berechen. Insbesondere wollen wir die Ableitung der Wurzelfunktion $x^{\frac{1}{2}}$ berechnen. Wir beschränken daher den Definitionsbereich auf die positiven reellen Zahlen, d.h. auf das Intervall $(0, \infty)$. Wir bestimmen also die Ableitung der Funktion $h_s \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert als $h_s(x) = x^s$, wobei s eine reelle Zahl ungleich 0 ist. Wie im letzten Abschnitt können wir

$$h_s(x) = x^s = e^{\ln(x)s}$$

schreiben. Also gilt $h_s(x) = f(g_s(x))$, wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist und $g_s\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion $g_s(x) = s\ln(x)$. Aus $f' = f$ erhalten wir

$$f'(g_s(x)) = e^{s\ln(x)} = h_s(x) = x^s\,,$$

und andererseits gilt

$$g_s'(x) = s \cdot \frac{1}{x}$$

unter Verwendung der Faktorregel und der Ableitung $\frac{1}{x}$ von $\ln(x)$. Mit der Kettenregel erhalten wir also für die Ableitung von h_s in einem Punkt $x \in (0,\infty)$

$$h_s'(x) = f'(g_s(x)) \cdot g_s'(x) = x^s \cdot s \cdot \frac{1}{x} = sx^{s-1}\,.$$

Wie wir feststellen, sieht das Ergebnis formal genau so aus wie für natürliche Exponenten s.

Die Quotientenregel

Die Quotientenregel ist eine Differentiationsmethode, die häufig unabhängig von der Kettenregel eingeführt wird. Tatsächlich kann man sie aber direkt aus der Kettenregel herleiten.

Satz 31 (Quotientenregel)**.** *Seien f und g differenzierbare Funktionen mit $g(x_0) \neq 0$. Dann gilt*

1. *$\frac{1}{g}$ ist differenzierbar in x_0 mit Ableitung $-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$,*
2. *$\frac{f}{g}$ ist differenzierbar in x_0 mit Ableitung $\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$.*

Beweis.

1. Wir betrachten die Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$. dann ist $\frac{1}{g} = (h \circ g)$. Wegen $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ gilt $h'(g(x)) = -\frac{1}{g(x)^2}$ und eine Anwendung der Kettenregel führt zum gewünschten Ergebnis.
2. Wir wenden die Produktregel auf $f \cdot \frac{1}{g}$ an und erhalten

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + \left(\frac{1}{g}\right)' \cdot f = \frac{f'}{g} - \frac{g'f}{g^2} = \frac{f'g - g'f}{g^2}. \qquad \square$$

Beispiel 32. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ihre Ableitung kann mit Hilfe der Quotientenregel bestimmt werden:

$$f' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2},$$

da $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$ bekanntermaßen 1 ist.

Die Ableitung der Funktion $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ können wir entweder auf die gleiche Art und Weise berechnen, oder wir benutzen

$$\cot'(x) = \left(\frac{1}{\tan}\right)'(x) = -\frac{\tan'(x)}{\tan(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2}.$$

2.5 Anwendungen

Zahlreiche Eigenschaften einer Funktion können unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung untersucht werden. Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf drei Eigenschaften konzentrieren.

Monotonieverhalten

Wir erinnern uns: eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, welche auf einem reellen Intervall I definiert ist, heißt *monoton wachsend*, wenn $x < y \implies f(x) \leq f(y)$ für alle x, y in I gilt. Für den Differenzenquotienten bedeutet das, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und zwar unabhängig von der Wahl von x und x_0 (insbesondere spielt es keine Rolle, ob $x < x_0$ oder $x_0 > x$). Falls die Funktion f nun differenzierbar ist, so können wir folgern, dass für jedes beliebige x in I die Ableitung $f'(x)$ größer oder gleich null sein muss.

Ganz analog wird „monoton fallend“ definiert und man kann argumentieren, dass für eine monoton fallende, differenzierbare Funktion die Ableitung immer ≤ 0 sein muss.

Umgekehrt gilt auch: wenn die Ableitung ≥ 0 ist, dann ist f monoton wachsend, wenn die Ableitung ≤ 0 ist, dann ist f monoton fallend. Intuitiv sollte das klar sein, da die Ableitung die Steigung des Funktionsgraphen widerspiegelt. Dies ist nur ein Plausibilitätsargument. Für einen rigorosen Beweis sei an dieser Stelle auf die Analysis-Vorlesung verwiesen.

Für den folgenden Satz sei noch daran erinnert, dass eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ *streng monton wachsend* heißt, wenn $x < y \implies f(x) < f(y)$ gilt. Analog wird *streng monoton fallend* definiert.

Satz 33. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei f eine Funktion die in jedem Punkt des Intervalls (a, b) differenzierbar ist. Dann gilt*

1. *f ist monoton wachsend auf dem Intervall (a, b) $\iff$ für jedes $x \in (a, b)$ gilt $f'(x) \geq 0$,*
2. *f ist monoton fallend auf (a, b) $\iff$ für jedes $x \in (a, b)$ gilt $f'(x) \leq 0$,*
3. *falls für jedes $x \in (a, b)$ gilt dass $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$), dann ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).*

Zuerst eine kleine Bemerkung. Ist Ihnen aufgefallen, dass nichts über die Umkehrung der dritten Aussage behauptet wird? Tatsächlich ist sie falsch. Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dies Funktion ist zwar streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber die Ableitung verschwindet in $x_0 = 0$.

Diesen Satz können wir nun verwenden, um differenzierbare Funktionen auf Monotonie zu untersuchen. Um Bereiche zu finden, in denen f monoton wachsend bzw. fallend ist, müssen wir nur noch die Lösungsmengen der Ungleichungen $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$

bestimmen. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass eine Funktion, welche stetig auf einem abgeschlossenen oder halboffenen Intervall I ist und im Innern dieses Intervalls monton wachsend (bzw. fallend) ist, diese Eigenschaft dann auch auf dem gesamten Intervall I besitzt.

Beispiel 34. Wir zeigen, dass $f(x) = e^x$ streng monoton wächst. Dazu betrachten wir die Ableitung $f'(x) = e^x$. Da die Exponentialfunktion nur Werte größer als 0 annimmt, haben wir $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gezeigt. Somit ist f streng monoton wachsend.

Beispiel 35. Wir wollen die Bereiche bestimmen, auf denen die Funktion $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ monoton wächst bzw. fällt.

Zu diesem Zweck bestimmen wir zuerst die Ableitung der Funktion:

$$f'(x) = 9x^2 - 6x - 3.$$

Um den Bereich zu bestimmen in dem f monoton wachsend ist, müssen wir nun die Ungleichung $f'(x) \geq 0$ beziehungsweise

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \geq 0$$

lösen. Das ist eine quadratische Ungleichung. Wir lösen also zuerst die zugehörige quadratische Gleichung:

$$x_1 = \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = 1$$

Da der Funktionsgraph von $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ eine nach oben offene Parabel ist, wissen wir somit, dass $f'(x) \geq 0$ für alle x in den Intervallen $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ und $[1, \infty)$ gilt. Somit ist f in diesen Intervallen monoton wachsend.

Analog sieht man, dass $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$ gilt. Somit ist f in diesem Intervall monoton fallend.

Extrema

In Anwendungen versucht man häufig, den Wert einer Funktion zu optimieren, das heißt, so groß (bzw. so klein) wie möglich zu machen. Die Stellen an denen f den maximalen bzw. minimalen Wert annimmt bezeichnet man als Extremstellen. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen globalen und lokalen Extremstellen.

Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt *globale Maximalstelle* (bzw. *globale Minimalstelle*), falls für alle $x \in D$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) erfüllt ist. Der Funktionswert $f(x_0)$ wird in diesem Fall als globales Maximum (bzw. globales Minimum) bezeichnet.

Beispiele 36.

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum, da es zu jeder reellen Zahl eine größere bzw. kleinere gibt.

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hat das globale Minimum 0 an der Stelle $x = 0$. Die Minimalstelle ist in diesem Fall eindeutig. Es gibt kein globales Maximum, da zu jeder reellen Zahl a eine Zahl b gefunden werden kann, sodass $b^2 > a$.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ besitzt das globale Maximum 1 und das globale Minimum -1. Es gibt unendlich viele globale Maximalstellen (jedes geradzahlige Vielfache von π ist globale Maximalstelle) und unendlich viele globale Minimalstellen (jedes ungeradzahlige Vielfache von π ist globale Minimalstelle).
- Eine stetige Funktion, welche auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist besitzt ein globales Maximum und ein globales Minimum, siehe dazu Satz **??** im Kapitel **??** über die Stetigkeit.

Im Gegensatz zu einer globalen Extremstelle vergleichen wir den Funktionswert an einer lokalen Extremstelle nicht mit den Funktionswerten an allen anderen Stellen, sondern nur an solchen, die „nahe bei x_0“ liegen. Formal kann man das folgendermaßen ausdrücken.

Definition. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ heißt *lokale Maximalstelle* (bzw. *lokale Minimalstelle*), falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in (a, b) \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) erfüllt ist. Der Funktionswert $f(x_0)$ wird in diesem Fall als lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) bezeichnet.

Offenbar ist jedes globale Extremum auch ein lokales Extremum: Wenn der Funktionswert größer als alle anderen Funktionswerte ist, dann ist er insbesondere auch größer als alle Funktionswerte in einer kleinen Umgebung. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 30,$$

hat zwar ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, aber keine globalen Extrema (siehe Abbildung 2.4).

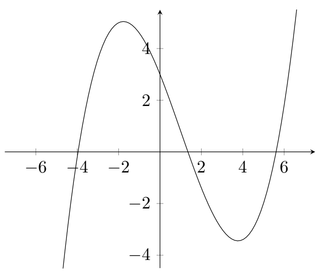


Abbildung 2.4: Eine Funktion ohne globale Extrema

Um lokale Extrema zu finden können wir wieder die Differentialrechung benutzen. Es ist klar, dass bei einer Funktion f ein lokales Maximum in x_0 vorliegt, wenn f links von x_0 monoton wachsend und rechts von x_0 monoton fallend ist. Präzise ausgedrückt, bedeutet dies folgendes: Existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass f auf dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ definiert ist, auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ monoton wachsend und auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ monoton fallend ist, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum. Analoges gilt für ein lokales Minimum. Da wir das Monotonieverhalten einer Funktion durch die Ableitung ausdrücken können, erhalten wir folgenden Satz.

Satz 37. *Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben und sei f eine auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ differenzierbare Funktion. Falls*

- *$f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in (x_0 - \epsilon, x_0]$ und*
- *$f'(x) \leq 0$ für jedes $x \in [x_0, x_0 + \epsilon)$,*

dann liegt in x_0 ein lokales Maximum vor. Die analoge Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums gilt ebenso.

Wenn die Bedingungen des obigen Satzes erfüllt sind, dann ist klar, dass $f'(x_0) = 0$ sein muss. Tatsächlich kann man sogar zeigen, dass wenn f an einer lokalen Extremstelle differenzierbar ist, die Ableitung dort den Wert 0 haben muss. Dies werden Sie in der Analysis-Vorlesung beweisen.

Ist die Funktion zweimal differenzierbar so kann das Verhalten der zweiten Ableitung Aufschluss darüber geben, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Satz 38. *Sei f eine in x_0 zweimal differenzierbare Funktion.*

1. *Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann liegt in x_0 ein lokales Maximum vor.*
2. *Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann liegt in x_0 ein lokales Minimum vor.*

Beweis. Wir werden nur die erste Aussage beweisen, da die zweite Aussage ganz analog bewiesen werden kann. Es sei also

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0\,.$$

Nach Definition des Grenzwertes gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < \frac{1}{2} f''(x_0) < 0 \quad \text{für alle } x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Da $f'(x_0) = 0$, folgt daraus

- $f'(x) < 0$ falls $x_0 < x < x_0 + \delta$ und
- $f'(x) > 0$ falls $x_0 - \delta < x < x_0$.

Also können wir mit Satz 37 schließen, dass ein lokales Maximum in x_0 vorliegt. □

Beispiel 39. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$. Da diese Funktion überall differenzierbar ist, muss an jedem Extremum $f'(x) = 0$ gelten. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat somit die Lösungen $x = 0$ und $x = 2$, und das sind unsere Kandidaten für lokale Extremalstellen.

Nun berechnen wir die zweite Ableitung $f''(x) = 6x - 6$. In $x = 0$ gilt $f''(x) = -6 < 0$, somit liegt dort ein lokales Maximum vor. In $x = 2$ gilt $f''(x) = 6 > 0$, also liegt dort ein lokales Minimum vor.

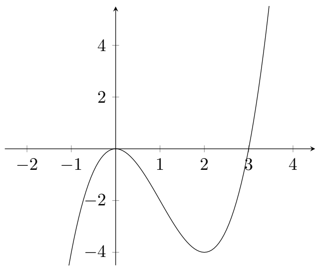


Abbildung 2.5: Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$

Beispiel 40. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4$. Die Ableitung $f'(x) = 4x^3$ nimmt nur an der Stelle $x = 0$ den Wert 0 an. Berechnen wir die zweite Ableitung so erhalten wir $f''(x) = 12x^2$, also ist $f''(0) = 0$ und wir können mit Satz 38 keine Aussage treffen.

Betrachten wir aber die erste Ableitung, so stellen wir fest, dass für $x < 0$ auch $f'(x) = 4x^3 < 0$ gilt. Entsprechend gilt für $x > 0$ auch $f'(x) = 4x^3 > 0$. Somit liegt laut Satz 37 ein lokales Minimum vor.

3 Integralrechnung

3.1 Definition des Integrals

Teile dieses ersten Abschnitts sind von der Behandlung des Themas in [Fri07] inspiriert.

Mittels einfacher Schulmathematik können wir den Flächeninhalt von einfachen Figuren, zum Beispiel denen der folgenden Abbildung, berechnen.

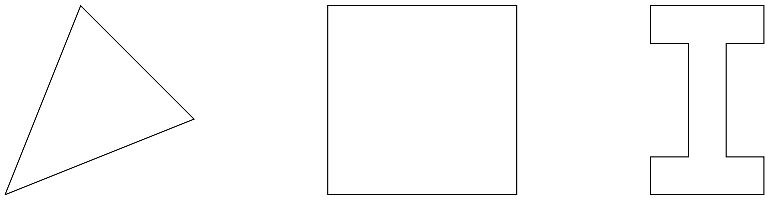


Abbildung 3.1: Verschiedene einfache Figuren

Wie steht es aber mit komplizierteren Figuren, wie zum Beispiel den nachfolgenden „runden Versionen“ der oberen Figuren?

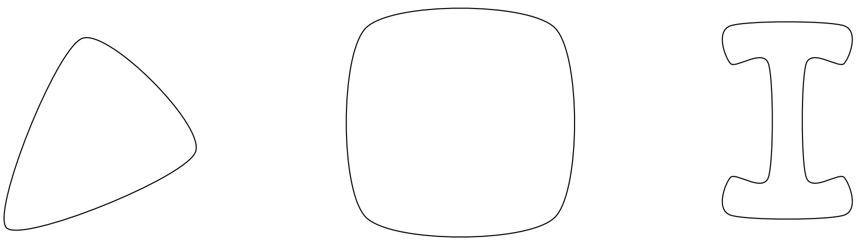


Abbildung 3.2: Verschiedene komplizierte Figuren

Eine Möglichkeit besteht darin, diese Figuren in (hoffentlich einfachere) Teile zu zerlegen. Die Versionen in Abbildung 3.2 können wir zum Beispiel als Varianten der Figuren aus Abbildung 3.1 auffassen, bei denen noch gewisse abgerundete Teile hinzugefügt wurden. Diese kann man (zumindest lokal) als „Fläche unter einem Graphen“ beschreiben.

Genauer formulieren wir also folgendes Modell-Problem. Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nehmen erst einmal an, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Unser Ziel ist, die Fläche zu berechnen, welche unten durch die x-Achse, oben durch den Graphen von f, von links durch die Gerade $\{x = a\}$ und von rechts durch die Gerade $\{x = b\}$ begrenzt wird.

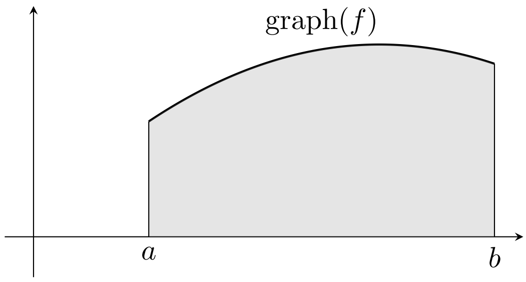


Abbildung 3.3: Unser Modell-Problem: Berechnung der grauen Fläche

Intuitiv ist die Lösung dieses Problems ganz einfach. Man approximiert die gesuchte Fläche durch Flächen, die man tatsächlich berechnen kann. Aber wie soll das gehen? Wenn wir – so wie wir es im Kapitel **??** über Grenzwerte mit dem Kreis getan haben – den Graphen durch Polygonzüge approximieren, so haben wir im Allgemeinen keine Kontrolle darüber, ob die graue Fläche unter dem Polygonzug größer oder kleiner als die gesuchte Fläche ist.

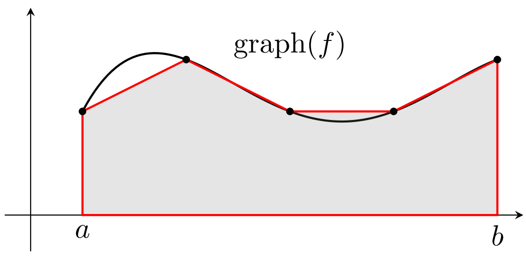


Abbildung 3.4: Approximation durch einen Polygonzug

Wir müssen also etwas geschickter vorgehen. Wir teilen zunächst das Intervall $I = [a, b]$ in n kleinere Intervalle auf:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\,.$$

Dabei brauchen die Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ nicht alle gleichlang zu sein. Die Menge der Punkte $Z = \{x_0, x_2, \ldots, x_n\}$ heißt *Zerlegung* des Intervalles I. Eine Zerlegung Z' heißt feiner als eine andere Zerlegung Z, falls Z eine echte Teilmenge von Z' ist.

Wir nehmen nun an, dass die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, deren Graphen wir betrachten, stetig ist. Auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ nimmt f dann sein Minimum u_k und sein Maximum o_k an, und es gilt natürlich

$$u_k \leq f(x) \leq o_k \quad \text{für alle } x \in [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Die Untersumme $U(f, Z)$ und die Obersumme $O(f, Z)$ wird durch

$$U(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

und

$$O(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} o_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

definiert. Diese Summen beschreiben gerade die Summen der Flächeninhalte der Rechtecke, die in Abbildung 3.5 links bzw. rechts eingezeichnet sind.

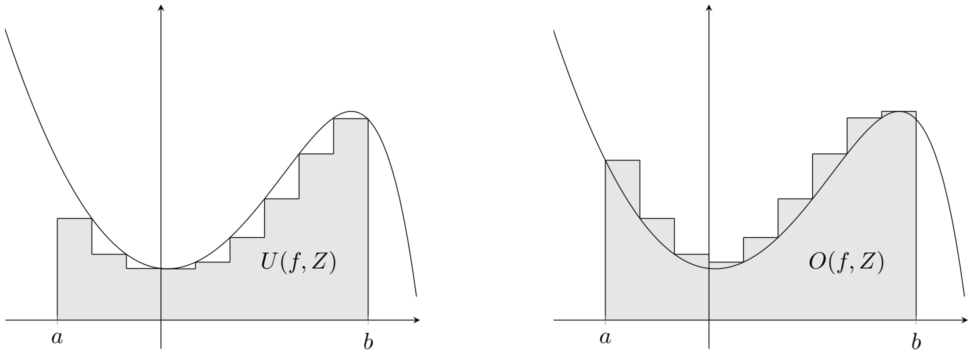


Abbildung 3.5: Unter- und Obersumme einer Funktion bezüglich einer Zerlegung.

Wenn eine sinnvolle Definition des Flächeninhalts A der Fläche unter dem Graphen existiert, so gilt für jede Zerlegung

$$U(f,Z) \leq A \leq O(f,Z),$$

denn die Vereinigung der Rechtecke, deren Fläche in $U(f,Z)$ berechnet wird, liegt vollständig unter dem Graphen, und die Vereinigung der Rechtecke, deren Fläche in $O(f,Z)$ berechnet wird, enthält die gesamte Fläche unter dem Graphen. Außerdem überzeugt man sich schnell, dass die Approximation der Fläche A durch Unter- und Obersummen „besser" wird, wenn man von einer Zerlegung Z zu einer feineren Zerlegung Z' übergeht, d.h. es gilt dann

$$U(f,Z) \leq U(f,Z') \leq A \leq O(f,Z') \leq O(f,Z).$$

Stetige Funktionen haben nun noch eine andere nützliche Eigenschaft:
Für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ des Intervalls $[a,b]$ (wobei die Anzahl n der Punkte natürlich von ϵ und f abhängt), so dass die Minima und Maxima jedes Teilintervalls $[x_{k-1}, x_k]$ sich um weniger als ϵ unterscheiden, d.h.

$$\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n \ : o_k - u_k < \epsilon.$$

Benutzt man dies und die Definition von Unter- und Obersumme, so sieht man, dass für Z (und jede feinere Zerlegung) die Ungleichung

$$O(f,Z) - U(f,Z) < \epsilon \cdot (b-a)$$

gilt. Hieraus folgt unter Verwendung allgemeiner Eigenschaften der reellen Zahlen, dass der Durchschnitt der Intervalle

$$\bigcap_{Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b]} [U(f,Z), O(f,Z)] \tag{3.1}$$

über *alle* Zerlegungen aus genau einer reellen Zahl besteht, welche wir nun einfach zur Definition der Fläche unter dem Graphen benutzen.

Definition. Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die eben beschriebene eindeutige Zahl

$$A \in \bigcap_{Z} [U(f,Z), O(f,Z)]$$

als das *Integral von* f im Intervall $[a,b]$ und schreiben dafür

$$A = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Als Konvention setzen wir $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ gleich $-\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Tatsächlich müssen wir bei obiger Definition nicht annehmen, dass die betrachtete Funktion nur nichtnegative Werte annimmt. Die Flächen, welche unter der x-Achse liegen, leisten einfach einen negativen Beitrag zum Integral.

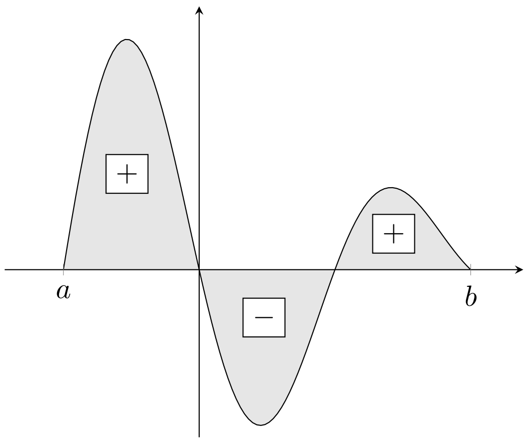


Abbildung 3.6: Flächen oberhalb der x-Achse leisten einen positiven Beitrag, Flächen unterhalb der x-Achse einen Negativen

Um das Integral einer Funktion f zu berechnen genügt es auch, eine Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, sodass die Folgen der Obersummen $(O(f,Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und der Untersummen $(U(f,Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ den selben Grenzwert I haben. Mithilfe dieser Folgen können wir die Differenz beliebig klein machen, der Grenzwert I ist dann das Integral.

Beispiel 41. Wir berechnen $\int_0^2 x\,dx$. Zu diesem Zweck betrachten wir die Zerlegungen von $[0,2]$ in gleich große Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$. Die Obersumme wird dann zu

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n^2+n}{n^2} = 2+\frac{1}{n},$$

wobei wir auf die Summenberechnung aus dem Kapitel über Beweismethoden zurückgreifen.

Die Untersumme wird entsprechend zu

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{2n-1} i = \frac{1}{n^2}\frac{(2n-1)2n}{2} = \frac{2n^2-n}{n^2} = 2-\frac{1}{n}.$$

Da die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, wissen wir, dass sowohl die Folge der Obersummen als auch die Folge der Untersummen gegen 2 konvergiert. Somit ist

$$\int_0^2 x\,dx = 2.$$

Das stimmt auch mit der Interpretation des Integrals als Fläche unter dem Funktionsgraphen überein: Für die Funktion $f(x) = x$ ist diese Fläche nämlich ein rechtwinkliges Dreieck in dem beide Katheten Länge 2 haben, Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$.

Bemerkung 42. Den hier beschriebenen Zugang zur Integration nennt man das *Riemannsche Integral*. Tatsächlich ist es für seine Existenz nicht notwendig, dass die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Sobald man Unter- und Obersummen definieren kan (was für jede beschränkte Funktion f möglich ist), nennt man die Funktion f *Riemann-integrierbar*, wenn der in (3.1) beschriebene Durchschnitt aus genau einer Zahl besteht. Diese Zahl heißt dann *Riemann-Integral* der Funktion f.

3.2 Stammfunktionen

Wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, kann man zwar in Einzelfällen Integrale mit Hilfe der Definition zu berechnen, doch diese Methode wird schnell relativ mühsam. Der in diesem Abschnitt formulierte Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt einen Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation her, welcher deutlich bessere Integrationsmethoden liefert.

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von f*, wenn F auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist und dort $F'f$ gilt.

Beispiel 43. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$, da $F'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$ ist. Allgemein ist $F(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^k$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$.

Beispiel 44. Wir zeigen, dass $F(x) = x \ln|x| - x$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \ln|x|$ ist.[1] Zu diesem Zweck leiten wir F ab und erhalten

$$F'(x) = 1 \cdot \ln|x| + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln|x|.$$

Beispiel 45. $F(x) = \sin x$ und $\tilde{F}(x) = \sin x + \sqrt[17]{3}$ sind beides Stammfunktionen von $f(x) = \cos x$, da die additive Konstante $\sqrt[17]{3}$ beim Ableiten „verschwindet".

Das obige Beispiel zeigt, dass Stammfunktionen nicht eindeutig definiert sind. Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann ist auch die Funktion $F(x) + c$ für jede beliebige reelle Konstante c eine Stammfunktion von $f(x)$. Da die einzigen Funktionen, deren Ableitung *überall* gleich 0 ist, die konstanten Funktionen sind, gilt auch die Umkehrung: sind F und $\tilde{F}$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so gilt $(F - \tilde{F})' = f - f = 0$. Es gibt also eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{F} - F = c$.

Die Bedeutung von Stammfunktionen erklärt der folgende Satz, demzufolge Integration in gewisser Weise als Umkehrung zur Differentiation betrachtet werden kann. Für seinen Beweis verweisen wir auf die Analysis-Vorlesung.

Satz 46 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $x_0 \in [a,b]$ ein fester Punkt. Dann gilt:*

(i) Die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert als

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

ist eine Stammfunktion von f.

(ii) Für jede Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ von f gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung 47. Anstatt $F(b) - F(a)$ schreibt man in diesem Kontext häufig auch $F(x)\big|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$.

Bemerkung 48. Wegen ihrer Bedeutung für die Integration schreibt man für die Stammfunktion einer Funktion f oft auch

$$\int f(x)\,dx.$$

In dieser Schreibweise nennt man Stammfunktionen auch *unbestimmtes Integral von f*, in Abgrenzung zum *bestimmten Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

bei dem die Integrationsgrenzen angegeben sind.

[1] Diese Behauptung zu überprüfen ist einfach. Wie man darauf kommt, werden wir in Beispiel 60 sehen.

Beispiel 49. Wir berechnen
$$\int_1^e \ln x \, dx.$$
Wir haben vorhin schon überprf̈t, dass $F(x) = x \ln |x| - x$ eine Stammfunktion von $\ln |x|$ ist. Da alle Punkte im Integrationsintervall größer als 0 sind, gilt dort $|x| = x$. Somit ist
$$\int_1^e \ln x \, dx = F(e) - F(1) = e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) = 1.$$
Beispiel 50. Wir wollen
$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$
berechnen. Wir wissen bereits, dass die Ableitung der Funktion $\cos x$ durch $-\sin x$ gegeben ist. Somit ist $\sin x$ die Ableitung von $-\cos x$ und $-\cos x$ folglich eine Stammfunktion von $\sin x$. Also können wir das Integral berechnen als
$$\int_0^\pi \sin x = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2.$$

Vorsicht: der obige Satz ist nur dann anwendbar, wenn die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wirklich im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig ist. Dafür muss sie insbesondere definiert sein. Das Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$ können wir so beispielsweise nicht berechnen, weil die Funktion bei $x = 0$ nicht definiert und somit insbesondere nicht stetig ist.

Ein wichtiger Aspekt von Satz 46 besteht darin, die Integration auf die (vergleichsweise einfachere) Differentiation zurückführen. Das hilft einerseits, weil wir die Stammfunktionen aller Ableitungen, die wir berechnet haben theoretisch kennen (das haben wir auch eben in den Beispielen benutzt), andererseits ergibt sich dadurch auch die Möglichkeit aus Differentiationsregeln Regeln für die Integration herzuleiten, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

3.3 Integrationsregeln

Mittels des Satz 46 haben wir die Integration einer Funktion auf das Auffinden einer Stammfunktion zurückgeführt. Einige einfache Stammfunktionen kennen wir schon, außerdem enthalten viele mathematische Formelsammlungen auch umfangreiche Integraltabellen, also Tabellen, die Stammfunktionen von Funktionen enthalten. Da solche Tabellen aber niemals alle Funktionen enthalten werden, beschäftigen wir uns in diesem Kapitel damit, wie wir Integrale komplizierter Funktionen auf Integrale einfacherer Funktionen zurückführen können.

Summen- und Faktorregel

Die folgenden zwei Regeln ergeben sich direkt aus der Definition des Integrals.

Satz 51. *Sind $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen , dann gilt:*

1.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

2. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Beispiel 52. Wir berechnen das Integral der Funktion $f(x) = 3\sin x + 5e^x - \frac{2}{x}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, b]$, wobei $b > 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^b f(x)\,dx &= \int_1^b \left(3\sin x + 5e^x - \frac{2}{x}\right)\,dx \\
&= \int_1^b 3\sin x\,dx + \int_1^b 5e^x\,dx + \int_1^b \left(-\frac{2}{x}\right)\,dx \\
&= 3\int_1^b \sin x\,dx + 5\int_1^b e^x\,dx - 2\int_1^b \frac{1}{x}\,dx \\
&= 3(-\cos b + \cos 1) + 5(e^b - e) - 2\ln b\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 53. Mit Summen- und Faktorregel können wir beliebige Polynome integrieren. Ist ein Polynom durch $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ gegeben, so können wir das Integral folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^x p(t)\,dt &= \int_0^x \left(\sum_{i=0}^k a_i t^i\right)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^k \left(\int_0^x a_i t^i\,dt\right) && \text{(Summenregel)} \\
&= \sum_{i=0}^k a_i \left(\int_0^x t^i\,dt\right) && \text{(Faktorregel)} \\
&= \sum_{i=0}^k a_i \left(\frac{1}{i+1} x^{i+1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}
\end{aligned}$$

Also ist durch die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$ eine Stammfunktion von p gegeben.

Beispiel 54. Schließlich können wir die Faktorregel benutzen, um auch die Stammfunktionen von Logarithmen bezüglich beliebiger Basen zu bestimmen. Sei also $a > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt für alle $x > 0$:

$$\int_1^x \log_a(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{\ln a} \ln(t)\,dt = \frac{1}{\ln a} \int_1^x \ln(t)\,dt = \frac{1}{\ln a}(x\ln(x) - x + 1)\,.$$

Da wir zu einer Stammfunktion noch eine beliebige Konstante addieren dürfen, ist also die Funktion $F_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, gegeben als $F_a(x) = \frac{1}{\ln a}(x \ln(x) - x)$, eine Stammfunktion von $f_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \log_a(x)$.

Partielle Integration

Die Faktorregel kann nur angewendet werden, wenn wir es mit einem konstanten Faktor zu tun haben. Wollen wir hingegen eine Funktion der Form $f(x) \cdot g(x)$ integrieren, benötigen wir die sogenannte partielle Integration. Für eine Funktion f mit Stammfunktion F und eine differenzierbare Funktion g gilt laut Produktregel

$$(F \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x),$$

beziehungsweise

$$f(x) \cdot g(x) = (F \cdot g)'(x) - F(x) \cdot g'(x).$$

Diese Überlegungen führen mit Satz 46 zum folgenden Resultat:

Satz 55 (Partielle Integration)**.** *Sei $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion einer stetigen Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und sei $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar mit stetiger Ableitung g' ist. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F \cdot g'(x)\, dx.$$

Für unbestimmte Integrale vereinfacht sich dies zu

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Bemerkung 56. Partielle Integration ist vor allem dann sinnvoll, wenn man die Stammfunktion F von f bereits kennt oder sehr leicht berechnen kann. Außerdem sollte das Integral auf der rechten Seite nach Möglichkeit leichter (oder zumindest nicht schwerer) zu lösen sein, als das auf der linken Seite.

Beispiel 57. Wir bestimmen die Stammfunktion von $x \cdot \ln(x)$ für $x \in (0, \infty)$ durch partielle Integration. Dafür wählen wir $f(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$ und berechnen $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$. Setzen wir nun in die Formel von Satz 55 ein, so erhalten wir als Stammfunktion

$$\begin{aligned}&\int x \cdot \ln(x)\, dx \\ &\qquad = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

Iterative Anwendung

In manchen Fällen ist es sinnvoll, auf das Integral auf der rechten Seite nochmals partielle Integration anzuwenden. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn $g(x)$ ein Polynom vom Grad mindestens 2 ist und $f(x)$ eine Exponentialfunktion oder Sinus bzw. Kosinus ist. In diesen Fällen reduziert sich der Grad des Polynoms g durch Ableiten, während die Funktion F gleich schwer zu integrieren ist wie die Funktion f. Nun kann man so lange partiell Integrieren, bis g Grad 0 hat. Das verbleibende Integral ist dann (manchmal) leicht zu lösen.

Beispiel 58. Wir suchen eine Stammfunktion der Funktion $(x^2-1)\cdot e^x$. Für die partielle Integration wählen wir $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2 - 1$. Dann ist $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $g'(x) = 2x$. Wir erhalten also

$$\int (x^2-1)\cdot e^x\,dx = e^x \cdot (x^2-1) - \int e^x \cdot 2x\,dx = e^x\cdot(x^2-1) - 2\int e^x \cdot x\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite berechnen wir wieder mittels partieller Integration. Wir wählen $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$, bestimmen $F(x) = e^x$ und $g'(x) = 1$ und setzen ein:

$$\int e^x \cdot x\,dx = e^x\cdot x - \int e^x \cdot 1\,dx = (e^x\cdot x - e^x = e^x(x-1)\,.$$

Somit erhalten wir

$$\int (x^2-1)\cdot e^x\,dx = e^x\cdot(x^2-1) - 2e^x(x-1) = e^x\cdot\left(x^2-2x+1\right)\,.$$

Rekursive Gleichungen

Manchmal kann es passieren, dass nach der partiellen Integration das Integral auf der rechten Seite das gleiche wie auf der linken Seite ist. Diese Möglichkeit besteht insbesondere, wenn wir eine Funktion integrieren, die aus Winkelfunktionen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt ist, da diese sich beim Integrieren „nicht stark ändern“. Wenn dieser Fall eintritt, können wir die Stammfunktion bestimmen, indem wir eine lineare Gleichung lösen.

Beispiel 59. Wir wollen eine Stammfunktion von $\cos x \cdot \sin x$ bestimmen. Wir wählen $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \sin x$, und erhalten als Stammfunktion von f die Funktion $F(x) = \sin x$ und $g'(x) = \cos x$ und setzen ein:

$$\int \cos x\cdot\sin x\,dx = \sin x\cdot\sin x - \int \sin x\cdot\cos x\,dx$$

Wir stellen fest, dass die Integrale auf der linken und rechten Seite identisch sind. Also können wir diese Integrale auf eine Seite bringen und erhalten

$$2\int \cos x\cdot\sin x\,dx = (\sin x)^2\,,$$

d.h.

$$\int \cos x\cdot\sin x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x)^2\,.$$

Partielle Integration mit $f \equiv 1$

Ein besonderer Kniff bei der partiellen Integration besteht manchmal darin, eine Funktion zu sehen, wo keine ist. Anstatt der Funktion $g(x)$ betrachten wir die Funktion $1 \cdot g(x)$, d.h. wir setzen $f(x) = 1$, und wenden partielle Integration an.

Beispiel 60. Wir wollen mit Hilfe dieses Tricks erklären, wie man die Stammfunktion von $\ln(x)$ *finden* kann, ohne dass sie wie in Beispiel 44 vom Himmel fällt. Es sei also $g(x) = \ln x$ und $f(x) = 1$, so dass $F(x) = x$ eine Stammfunktion von f ist und $g'(x) = \frac{1}{x}$. Mittels partieller Integration erhalten wir nun

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x\,.$$

Dies erklärt die Behauptung aus Beispiel 44.

Beispiel 61. Wir berechnen die Stammfunktion von $g(x) = (\ln x)^2$ für $x > 0$. Dazu wählen wir $f(x) = 1$, also $F(x) = x$ und berechnen $g'(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x}$. Nun setzen wir ein und erhalten

$$\int (\ln x)^2\,dx = x \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot 2\ln(x)\frac{1}{x}\,dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln(x)\,dx\,.$$

Die Stammfunktion des Logarithmus haben wir gerade noch einmal bestimmt. Insgesamt erhalten wir

$$G : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad G(x) = x\big((\ln x)^2 - 2\ln(x) + 1\big)$$

als Stammfunktion von $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (\ln x)^2$.

Substitution

Die Substitutionsregel dient der Berechnung von Integralen von Funktionen, welche sich als Verknüpfung $f \circ \varphi$ von zwei Funktionen f und φ schreiben lassen. Sie kann als „Umkehrung“ der Kettenregel angesehen werden.

Falls $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, so besagt die Kettenregel (der Differentialrechnung), dass $F(\varphi(x))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ ist. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich das folgende Resultat.

Satz 62 (Substitution)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine stetige Funktion, die auf (c,d) differenzierbar ist und eine stetige Ableitung hat. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Die Funktion φ im obigen Satz wird in Anwendungen oft bijektiv gewählt, so dass es eine Umkehrfunktion φ^{-1} gibt. Damit erhält man

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx.$$

Außerdem können wir nun eine Stammfunktion von f bestimmen:

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,ds = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx\,.$$

Wir erhalten also eine Stammfunktion $F(t)$ von $f(t)$, indem wir $x = \varphi^{-1}(t)$ in eine Stammfunktion $H(x)$ von $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ einsetzen.

Bemerkung 63. In den Beispielen in diesem Kurs wird es meistens relativ offensichtlich sein, welche Funktion φ sich für die Substitution anbietet. Bei einer Funktion der Bauart $\sin(h(x))$, $\ln(h(x))$ etc. ist der erste Versuch meistens $t = h(x)$ zu setzen und diese Gleichung nach x aufzulösen. Außerdem gibt es noch einige „Standardsubstitutionen“, die bei Funktionen einer bestimmten Bauart häufig funktionieren. Im Allgemeinen ist es aber eine gewisse Kunst, eine geeignete Substitution zu finden. Momentan sind Menschen mit etwas Übung dabei in komplizierteren Fällen immer noch deutlich besser als Computerprogramme.

In der Praxis ist es oft einfacher, ein gegebenes Integral mit der rechten Seite der Gleichung (3.2) zu identifizieren, wenn man Substitutionen verwendet. Dies werden wir auch in den meisten Beispielen tun.

Lineare Substitution

Der einfachste Fall einer Substitution tritt auf, wenn die zu integrierende Funktion die Form $f(mx+n)$ hat. In diesem Fall betrachtet man die Substitution $\varphi(x) = (mx+n)$, so dass $\varphi'(x) = m$. Die rechte Seite von (3.2) hat dann die Form

$$\int_c^d f(mx+n) \cdot m\,dx,$$

so dass wir für unser gesuchtes Integral

$$\int_c^d f(mx+n)\,dx = \frac{1}{m}\int_{\phi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt \tag{3.3}$$

erhalten.

Beispiel 64. Wir bestimmen das Integral der Funktion e^{-3x} im Intervall $[0,2]$. Dazu setzen wir $\varphi(x) = -3x$ und erhalten $\varphi'(x) = -3$, sowie $f(t) = e^t$. Daraus folgt mit (3.3)

$$\int_0^2 e^{-3x}\,dx = \int_0^2 f(\varphi(x))\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^{-6} f(t)\,dt = \frac{1}{3} \cdot \int_{-6}^0 e^t\,dt = \left.\frac{e^t}{3}\right|_{-6}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3e^6}\,.$$

Wollen wir eine Stammfunktion bestimmen, so führt die gleiche Substitution zum Ziel. Da $\varphi(x) = -3x$ eine bijektive Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ist, erhalten wir

$$\int_0^x e^{-3y}\,dy = -\frac{1}{3}\int_0^{-3x} e^t\,dt = -\left.\frac{e^t}{3}\right|_0^{-3x} = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}\,.$$

Also ist $-\frac{1}{3}e^{-3x}$ eine Stammfunktion von e^{-3x}.

Beispiel 65. Wir wollen die Funktion $\sin(\pi(x-3))$ im Intervall $[-1,2]$ integrieren. Eine geeignete Substitution sollte die Funktion vereinfachen, beispielsweise wäre $t=\varphi(x)=\pi(x-3)$ praktisch. Führen wir diese Substitution durch, erhalten wir $\varphi'(x)=\pi$ und somit wieder unter Verwendung von (3.3)

$$\int_{-1}^{2} \sin(\pi(x-3))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-4\pi}^{-\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{\pi}(-\cos t)\Big|_{-4\pi}^{-\pi} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}$$

Umkehrung der Kettenregel

Bei der linearen Substitution haben wir ausgenutzt, dass die Ableitung $\varphi'(t)$ eine Konstante war und somit die Berechnung des Integrals nicht erschwert hat. In gewissen anderen Fällen, wenn ein Integrand (fast) in der Form $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ gegeben ist, kann man Satz 62 ebenfalls direkt anwenden. Man beachte, dass die Funktion φ nicht bijektiv sein muss, damit der Satz anwendbar ist. Leider ist es allerdings nicht immer einfach zu erkennen, dass wir es mit einer Funktion in dieser Form zu tun haben.

Beispiel 66. Wir wollen das Integral der Funktion $x^3\cdot e^{(x^4)}$ im Intervall $[-1,2]$ bestimmen. Da uns der Exponent am meisten stört, ist es verlockend, die Substitution $\varphi(x)=x^4$ auszuprobieren. Es gilt dann $\varphi'(x)=4x^3$, was bis auf die Konstante 4 dem anderen Faktor des Integranden entspricht. Dies stört nicht sehr, denn wir erhalten aus (3.2)

$$\int_{-1}^{2} x^3\cdot e^{(x^4)}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2} 4x^3\cdot e^{(x^4)}\,dx = \frac{1}{4}\int_{(-1)^4}^{2^4} e^t\,dt = \frac{1}{4}e^t\Big|_{1}^{16} = \frac{e^{16}-e}{4}.$$

Beispiel 67. Wir wollen eine Stammfunktion des Tangens, $\tan:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, bestimmen. Zu diesem Zweck schreiben wir die Funktion als

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

für $f(t)=-\frac{1}{t}$ und $\varphi(x)=\cos x$. Wir erhalten aus (3.2)

$$\int_0^x \tan(s)\,ds = \int_1^{\cos x} -\frac{1}{t}\,dt = -\ln(t)\Big|_1^{\cos x} = -\ln(\cos x)\,.$$

Also ist die auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ definierte Funktion $-\ln(\cos x)$ eine Stammfunktion des Tangens.

Beispiel 68. Wir geben noch ein weiteres Beispiel für diese Art der Substitution, und betrachten das Integral

$$\int_a^b x^5(1-x^3)^{313}\,dx.$$

Der Integrand ist ein Polynom, welches nach Ausmultiplizieren elementar integrierbar ist. Allerdings ist dieses Vorgehen für praktische Zwecke eher unbrauchbar. Stattdessen versuchen wir es mit der Substitution $\varphi(x)=1-x^3$, so dass $\varphi'(x)=-3x^2$. Der Integrand hat also die Form $(\varphi(x))^{313}\cdot\varphi'(x)\cdot(-\frac{1}{3}x^3)$, und den letzten Faktor können wir nun glücklicherweise ebenfalls als Funktion von $\varphi(x)$ ausdrücken, nämlich als $-\frac{1}{3}x^3=-\frac{1}{3}(1-$

$\varphi(x))$. Wenn wir also die Funktion f als $f(t) = -\frac{1}{3}(1-t)t^{313}$ wählen, so hat unser Integral die gewünschte Form

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx,$$

und wir erhalten mit (3.2)

$$\begin{aligned}
&\int_a^b x^5(1-x^3)^{313}\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\int_{1-a^3}^{1-b^3} (1-t)t^{313}\, dt = \frac{1}{3}\int_{1-b^3}^{1-a^3} (1-t)t^{313}\, dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{314}t^{314} - \frac{1}{315}t^{315}\right)\Bigg|_{1-b^3}^{1-a^3}.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist in der Praxis deutlich handhabbarer als die eingangs erwähnte Methode des Ausmultiplizierens.

3.4 Flächenberechnung mittels Integration

Wie bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt, kann das bestimmte Integral als disignierte Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse interpretiert werden, wobei Teile der Fläche, die unterhalb der x-Achse liegen, negativ zum Ergebnis beitragen. Diese Interpretation kann benutzt werden, um die Fläche zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ zu bestimmen (siehe Abbildung 3.7).

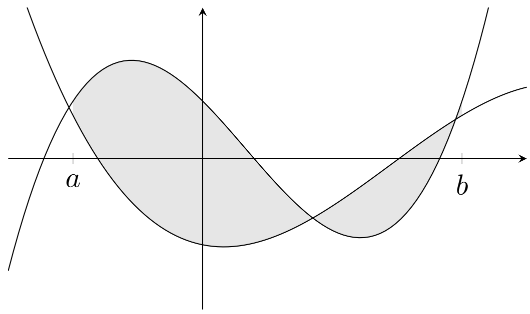


Abbildung 3.7: Fläche Zwischen zwei Funktionen

Gilt für jedes $x \in [a, b]$, dass $f(x) \geq g(x)$, dann können wir die Fläche zwischen den beiden Funktionen als Differenz der Integrale berechnen:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Für zwei beliebige Funktionen f und g werden wir mit dieser Rechnung nur den signierten Flächeninhalt erhalten, bei dem die Teile mit $f(x) < g(x)$ negativ zum Ergebnis beitragen. Wollen wir die tatsächliche Fläche zwischen zwei beliebigen Funktionsgraphen stetiger Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ bestimmen, so können wir folgendermaßen vorgehen:

1. Wir bestimmen die Nullstellen der Funktion $f - g$ gilt. Das sind genau die x-Koordinaten der Punkte, in denen sich die Funktionsgraphen von f und g schneiden. Wir nehmen an, das es nur endlich viele solche Stellen gibt, und bezeichnen sie in aufsteigender Reihenfolge mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Weiter führen wir die Bezeichnungen $x_0 = a$ und $x_{n+1} = b$ ein.

2. In jedem der Intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ gilt entweder $f(x) \geq g(x)$ oder $g(x) \geq f(x)$. Somit können wir die Fläche zwischen den Funktionen in jedem dieser Intervalle entweder durch $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-g(x))\,dx$ oder durch $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(g(x)-f(x))\,dx$ bestimmen. Da sich die beiden Integrale nur um ein Vorzeichen unterscheiden und wir schon wissen, dass die Fläche immer positiv sein muss, können wir aber auch einfach $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x) - g(x))\,dx$ berechnen und dann den Betrag des Ergebnisses nehmen.

3. Wir addieren nun die Flächen über den einzelnen Intervallen $[x_k, x_{k+1}]$, um die Gesamtfläche zu erhalten.

Beispiel 69. Wir berechnen die Fläche, zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = (\sin x)^2$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

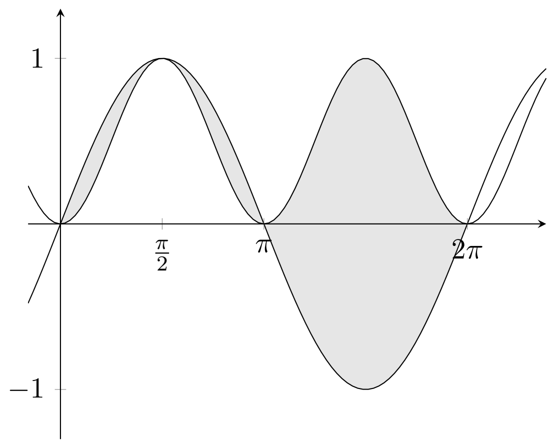


Abbildung 3.8: Fläche zwischen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = (\sin x)^2$

1. Zuerst bestimmen wir die Werte von x für die $\sin x = (\sin x)^2$ gilt. Um diese Gleichung zu lösen substituieren wir $r = \sin x$ und erhalten die quadratische Gleichung $r = r^2$ beziehungsweise $r^2 - r = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch 0 und 1.

   Für eine Lösung der ursprünglichen Gleichung $\sin x = (\sin x)^2$ muss also $\sin x = 0$ oder $\sin x = 1$ gelten. Ersteres geschieht im Intervall $[0, 2\pi]$ an den Stellen 0, π und 2π, letzteres ist nur bei $x = \frac{\pi}{2}$ der Fall.

   Die zu betrachtenden Teilintervalle für die Integration sind somit $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$.

2. Um die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ in den einzelnen Intervallen zu integrieren bestimmen wir zunächst eine Stammfunktion:

$$\int \left(\sin x - (\sin x)^2\right)\, dx = \int (\sin x)\, dx - \int (\sin x)^2\, dx$$

Das erste Integral lässt sich als $-\cos x + c$ schreiben. Für das zweite Integral benutzen wir partielle Integration. Wir wählen $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x$ und bestimmen $F(x) = -\cos x$ und $g'(x) = \cos x$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^2\, dx &= -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cos x\, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (\cos x)^2\, dx\,.\end{aligned}$$

Wir formen das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung um

$$\int (\cos x)^2\, dx = \int \left(1 - (\sin x)^2\right)\, dx = \int 1\, dx - \int (\sin x)^2\, dx = x - \int (\sin x)^2\, dx.$$

Das verbleibende Integral ist gerade das Ausgangsintegral unserer Nebenrechnung. Einsetzen ergibt nun

$$\int (\sin x)^2\, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int (\sin x)^2\, dx\,,$$

und durch einfache Umstellung wird hieraus

$$\int (\sin x)^2\, dx = \frac{1}{2}\left(-\cos x \cdot \sin x + x\right)\,.$$

Insgesamt erhalten wir also die Stammfunktion

$$H(x) = \int \sin x - (\sin x)^2\, dx = -\cos x - \frac{1}{2}\left(x - \cos x \cdot \sin x\right)$$

für $h = f - g$. Mit Hilfe dieser Stammfunktion können wir nun den Flächeninhalt auf den einzelnen Teilintervallen bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\left[0, \frac{\pi}{2}\right]: && A_1 := \left|H\left(\frac{\pi}{2}\right) - H(0)\right| = \left|-\frac{\pi}{4} - (-1)\right| = 1 - \frac{\pi}{4} \\
&\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]: && A_2 := \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|1 - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 - \frac{\pi}{4} \\
&[\pi, 2\pi]: && A_3 := |F(2\pi) - F(\pi)| = \left|-1 - \pi - \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right| = 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. Die Gesamtfläche ergibt sich als Summe der Einzelflächen:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} + 2 + \frac{\pi}{2} = 4.$$

Literaturverzeichnis

[Fri07] Klaus Fritzsche, *Mathematik für Einsteiger*, 4. Edition, Spekturm Akademischer Verlag, Heidelberg, 2007.

[Hou12] Kevin Houston, *Wie man mathematisch denkt*, Springer Spekturm, Heidelberg, 2012.