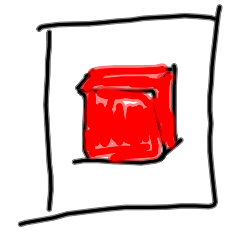
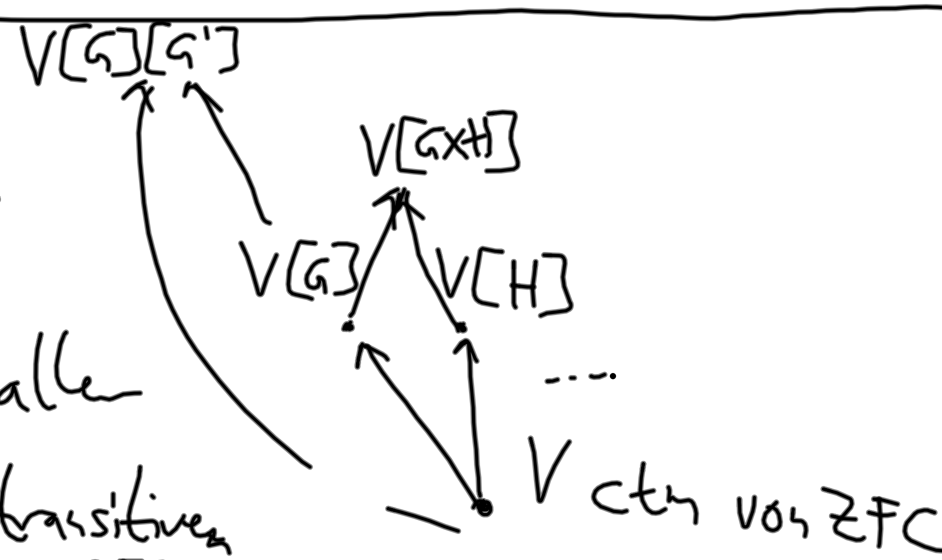
Modallogik & Forcing



Schalter ≠ Knopf

Generisches Multiversum:



Die Menge aller abzählbaren transitiven Modelle (ctms) von ZFC, die sich mittels Forcing aus einem gegebenen ctm V von ZFC erzeugen lassen.

$\mathcal{L}_\Box$ Formeln der einfachen Modallogik:

$$\varphi ::= \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \Phi}}{p} \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\varphi' \mid \varphi\vee\varphi' \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

(Φ Mengen von Aussagenvariablen).

Bsp: $p \wedge \Box q \to \Diamond(q \wedge p)$.

Kripke-Rahmen:

$$\langle W, R\rangle, \quad R \subseteq W \times W.$$

Kripke-Modelle:

$\langle W, R, v\rangle$, $\langle W, R\rangle$ Kripke-Rahmen und

$v : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ eine Bewertung.

Sei $\langle W, R, v\rangle$ Kripke-Modell, $w \in W$, $\varphi \in \mathcal{L}_\Box$, so definieren wir $\langle W, R, v\rangle, w \models \varphi$ induktiv:

i) $\langle W,R,v\rangle, w \models p \iff w \in v(p)$, $p \in \Phi$

ii) — " — $\models \varphi * \psi \iff \langle W,R,v\rangle, w \models \varphi \; * \; \langle W,R,v\rangle, w \models \psi$

iii) — " — $\models \neg\varphi \iff \langle W,R,v\rangle, w \not\models \varphi$

iv) — " — $\models \Box\varphi \iff \forall w' : wRw' \to \langle W,R,v\rangle, w' \models \varphi$

v) — " — $\models \Diamond\varphi \iff \exists w' : wRw' \wedge \langle W,R,v\rangle, w' \models \varphi.$

Sei $\langle W, R, v\rangle$ Kripke-Modell, so setzen wir:

$$\langle W, R, v\rangle \vDash \varphi \iff \forall w \in W: \langle W, R, v\rangle, w \vDash \varphi.$$

Sei $\langle W, R\rangle$ Kripke-Rahmen, so:

$$\langle W, R\rangle \vDash \varphi \iff \forall v: \Phi \to \mathcal{P}(W): \langle W, R, v\rangle \vDash \varphi.$$

Die Theorie eines Kripke-Rahmens ist immer eine <u>normale modale Logik</u>, d.h. eine Menge $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_\Box$, s.d.

(i) Σ enthält alle aussagenlog. Tautologien

(ii) Σ ist abgeschlossen unter MP

(iii) Σ ist abgeschlossen unter $\Box$-Gen: $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

(iv) Σ ist — " — unter Substitution.

(v) $[\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)] \in \Sigma$ K-Axiom

(vi) $[\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p] \in \Sigma$

Beispiele für normale Modallogiken:

Axiome:

$$\Box p \to p \qquad (T)$$

$$\Box p \to \Box\Box p \qquad (4)$$

$$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \qquad (.2)$$

Logiken:

T : normale ML + (T)

S4 : — " — + (T) + (4)

S4.2 : — " — + (T) + (4) + (.2)

Eine Funktion $H: \mathcal{L}_\Box \longrightarrow \mathcal{L}_\in$ heißt Hamkins-Übersetzung gdw.:

$$H(\neg\varphi) = \neg H(\varphi)$$

$$H(\varphi * \psi) = H(\varphi) * H(\psi)$$

$$H(\Box\varphi) = \forall \mathbb{B} \text{ vollst. Boolesche Algebra: } \left([\![H(\varphi)]\!]_{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{B}} \right)$$

$$\longleftrightarrow \forall \mathbb{P} : \forall G \subseteq \mathbb{P} \text{ gen. } \left(V[G] \models \varphi \right)$$

Die Modallogik d. Forcings MLF ist:

$$\mathrm{MLF} := \{\varphi \in \mathcal{L}_\Box \mid \forall H \text{ Hamkins-Übersetzungen: } \mathrm{ZFC} \vdash H(\varphi)\}$$

Sei $V \models \mathrm{ZFC}$, so ist

$$\mathrm{MLF}^V := \{\varphi \in \mathcal{L}_\Box \mid \forall H \text{ Hamkins-Übersetzung: } V \models H(\varphi)\}.$$

Beobachtung: Für $V \models \mathrm{ZFC}$:

$$\mathrm{MLF} \subseteq \mathrm{MLF}^V.$$

Bestimme MLF.

①: $S4.2 \subseteq MLF$, da Forcing reflexiv, transitiv und gerichtet ist.

② $MLF \subseteq MLF^L \subseteq S4.2$

<u>Programm:</u> 1. Identifiziere Klasse von Kripke-Rahmen bzgl. deren S4.2 vollständig ist

2. Baue Translation von Modaler Wahrheit in Rahmen aus 1. in das gen. Multiversum von L

Thm: Eine modale Formel ist in S4.2 gdw. sie in allen endlichen prä-Booleschen Algebren erfüllt wird.

Sei $\langle W, R, v \rangle$ ein Kripke-Modell und $\underset{\sim}{0}$ ein R-kleinstes Element. Sei $V \models ZFC$ und H eine Hamkins-Übersetzung. Dann überträgt H Wahrheit zu $\langle W, R, v \rangle$ und V gdw. f.a. $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box}$:

$$\langle W, R, v \rangle, \underset{\sim}{0} \models \varphi \iff V \models H(\varphi).$$

<u>Lemma:</u> Sei $V \models ZFC$ s.d. es für jede endl. prä-Boolsche Algebra $(B,\leq)$ und jede Bewertung v eine H-Übersetzung gibt, die Wahrheit zw. $\langle B, \leq, v\rangle$ und V überträgt.

<u>Dann</u> ist $MLF^V \subseteq S4.2$.

Eine Formel $\beta \in \mathcal{L}_\in$ heißt Knopf für $V \models ZFC$ gdw.

$$V \models \Diamond\Box\beta.$$

<u>Bsp:</u> $V \neq L$, $\aleph_1^L$ ist Kardinalzahl

Eine Formel $\sigma \in \mathcal{L}_\in$ heißt Schalter für V gdw.

$$V \models \Box(\Diamond\sigma \wedge \Diamond\neg\sigma)$$

<u>Bsp:</u> CH

Sei $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ Menge von Knöpfen und über V

$S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ Menge von Schaltern, so

nennen wir $B \cup S$ <u>unabhängig</u> gdw.

$V \models \neg\beta_i$ f. $i \leq n$ und wir können mittels
unabhängig
Forcing V die Wahrheitswerte jedes Schalters ändern
und jeden Knopf "drücken".

Lemma: Wenn es bel. große endl. unabhängige Mengen von Knöpfen und Schaltern über $V \models ZFC$ gibt, so ist

$$\mathrm{MLF}^V \subseteq S4.2.$$

Für L gibt's sowas!

$$\beta_n :\equiv \exists f : \beth^L_{n+2} \hookrightarrow \mathcal{P}(\beth^L_n).$$

$$\sigma_m :\equiv 2^{\beth_{\omega+m}} = \beth_{\omega+m+1}$$

Def.: $\mathbb{P}$ erfüllt die κ-cc. (κ reg.) gdw. es in $\mathbb{P}$ keine Antikette von Mächtigkeit κ gibt.

- $\mathbb{P}$ ist κ-abgeschlossen $\iff$

$$\forall \gamma < \kappa \; \forall \langle p_\beta \mid \beta < \gamma \rangle \in \mathbb{P}^\gamma : \left(\forall \beta \leq \beta' < \gamma : p_{\beta'} \leq p_\beta \right)$$

$$\rightarrow \exists p \in \mathbb{P} \; \forall \beta < \gamma : p \leq p_\beta .$$

Prop. Sei $W \models ZFC$ ctm.

Sei $A := \{ n \in \omega \mid W \models \Box \beta_n \}$

Sei $B \subseteq \omega$ s.d. $A \subseteq B$.

Dann können über W erzwingen, dass β_n für alle $n \in B$ erfüllt ist und $\neg \beta_n$ für alle $n \in \omega \setminus B$.

<u>Bew:</u> Sei $\kappa_n := |\beth^{\lambda}_n|^{+}$ f. $n \in \omega$.

Sei $\mathrm{Fn}_\mu(\kappa, \lambda) := \{ p : \kappa \dashrightarrow \lambda \mid |p| < \mu \}$.

Nach Δ-lemma: $\mathrm{Fn}_\mu(\kappa, \lambda)$ hat $(\lambda^{<\mu})^{+}$-c.c..

Setze:

$$\mathbb{P}_n := \begin{cases} \mathrm{Fn}_{\kappa_n}(\kappa_{n+2}, \lambda), & \text{für } n \in B \setminus A, \\ \mathbb{1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\mathbb{P} = \prod_{n \in \omega} \mathbb{P}_n$ das full support product.

<u>Klar:</u> $\Vdash_{\mathbb{P}} \beta_n$ für alle $n \in B$.

Sei $n \in \omega \setminus B$. Dann ist $\mathbb{P}_n = \mathbb{1}$.

Da $W \models \neg \beta_n$, gilt, dass

$$\kappa_n < \kappa_{n+1} < \kappa_{n+2} \text{ und } 2^{\kappa_n} = \kappa_{n+1}.$$

Wir haben: $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_{<n} \times \mathbb{P}_{>n}$.

$\mathbb{P}_{>n}$ ist κ_{n+1}-abgeschlossen. Somit $\mathbb{P}_{>n}$ keine neuen Teilmengen von κ_i hinzu. Wenn also $\mathbb{P}_{>n}$ eine Inj. $\kappa_{n+2} \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa_i)$ hinzufügt, so wird κ_{n+2} kollabiert.

Es ist aber $\mathbb{P}_{>n} \cong \mathbb{P}_{n+1} \times \mathbb{P}_{>n+1}$ und $\mathbb{P}_{>n+1}$ ist κ_{n+2}-abgeschlossen.

Somit kollabiert schon $\mathbb{P}_{n+1}$ die Kard-Zahl κ_{n+2}. Aber $\mathbb{P}_{n+1}$ hat die $(2^{<\kappa_{n+1}})^+$-c.c. mit $(2^{<\kappa_{n+1}})^+ = (2^{\kappa_n})^+ = \kappa_{n+2}$. $\lightning$

Sei $G \subseteq \mathbb{P}_{>n}$ generisch über W. Arbeite in $W[G]$

Da $\mathbb{P}_{>n}$ ist κ_{n+1}-abg. Somit ist

$$\mathrm{Fn}_{\kappa_m}(\kappa_{n+2}, 2)^W = \mathrm{Fn}_{\kappa_m}(\kappa_{n+2}, 2)^{W[G]} \text{ für } m < n.$$

<u>Fallunterscheidung:</u>

① $n-1 \in A \cup (\omega \setminus B)$. Dann ist $\mathbb{P}_{<n} \cong \mathbb{P}_{<m}$ für ein $m < n$ und $\mathbb{P}_{<m}$ hat die $(2^{\kappa_{m-1}})^+$-c.c. mit $(2^{\kappa_{m-1}})^+ \leq \kappa_n$.

$$\boxed{W[G] \models 2^{\kappa_{n-1}} = \kappa_m}$$

② $n-1 \in B \setminus A$. Dann ist $2^{<\kappa_{n-1}} \leq \kappa_n$. Somit hat $\mathbb{P}_{<n}$ die κ_{n+1}-c.c..

Also: $\mathbb{P}_{<n}$ hat κ_{n+1}-cc.

Somit werden κ_{n+1} und κ_{n+2} erhalten.

Da $|\mathbb{P}_{<n}| \leq 2^{\kappa_{n-1}} \cdot \kappa_{n+1} = \kappa_{n+1}$,

~~S~~ fügt $\mathbb{P}_{<n}$ höchstens $\kappa_{n+1}^{\kappa_n} = \kappa_{n+1}$ viele Teilmengen von κ_n hinzu.

Somit bleibt die Kardinalität von $\mathcal{P}(\kappa_n)$ erhalten. Also: $V[H \times G] \models \beta_n$ für $H \subseteq \mathbb{P}_{<n}$ gen.

$\boxtimes$

Symmetrisches Forcing

Daten: $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$

$\mathcal{F}$ normaler Filter auf Γ

$G \subseteq \mathbb{P}$ generisch über $M \models ZFC$,

so definiere $M_{\mathcal{F}}[G] := \mathrm{Val}_G(HS_{\mathcal{F}})$

$$S_{\mathcal{F}} := \{ t \in M^{\mathbb{P}} \mid \mathrm{sym}(t) \in \mathcal{F} \}$$

$$HS_{\mathcal{F}} := \{ t \in M^{\mathbb{P}} \mid t \in S_{\mathcal{F}} \wedge \forall s \in \mathrm{dom}(t) : s \in HS_{\mathcal{F}} \}$$

Fakt: $M_{\mathcal{F}}[G] \models ZF$

$$M \subseteq M_{\mathcal{F}}[G] \subseteq M[G].$$

Definiere analog zu vorher:

MLS und MLS^M

Achtung: Betrachte ZF_ - beweisbare Prinzipien.

To do: ① Zeige Gerichtetheit von Sym. Forcing.

L

② Knöpfe & Schalter über ZF-Modell V

dieselben wie vorher

Ersetze Injektion durch Surjektion