Evasion und domination.

Def. $f, g \in {}^{\kappa}\kappa$

$f \leq^{*} g \;:\Longleftrightarrow\; \exists \alpha < \kappa \;\; \forall \beta \geq \alpha \;\; f(\beta) \leq g(\beta)$

$d(\kappa) := \min \{ |D| \mid D \subseteq {}^{\kappa}\kappa$ mit

$\forall f \in {}^{\kappa}\kappa \;\; \exists g \in D$ mit $f \leq^{*} g \}$.

ist die domination-Zahl.

$b(\kappa) := \min \{ |B| \mid B \subseteq {}^{\kappa}\kappa$ mit

$\forall g \in {}^{\kappa}\kappa \;\; \exists f \in B$ mit $f \not\leq^{*} g \}$.

Prop $b(\aleph_\omega) \leq b(\aleph_0) \leq d(\aleph_0) \leq d(\aleph_\omega)$

[$b(\kappa) \leq b(cf(\kappa)) \leq d(cf(\kappa)) \leq d(\kappa)$]

Bew. Für $f \in {}^\omega\omega$ definiere $u(f) : \aleph_\omega \to \aleph_\omega$

$$u(f)(\alpha) := \aleph_{f(n)} \quad \text{für } \aleph_n \leq \alpha < \aleph_{n+1}$$

$$u(f)(\alpha) := 0 \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \aleph_0$$

Für $f \in {}^{\aleph_\omega}\aleph_\omega$ sei $d(f) : \omega \to \omega$

$$d(f)(n) := m \in \omega \text{ mit } \aleph_m = |f(\aleph_n)|^+.$$

Klar gilt $f \leq^{\aleph_0} d(u(f))$

und wenn $f, g \in {}^{\aleph_\omega}\aleph_\omega$ mit $f \leq^{\aleph_\omega} g \Rightarrow d(f) \leq^{\aleph_0} d(g)$.

„$b(\aleph_\omega) \leq b(\aleph_0)$"

Sei $\mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ ein unbeschränkte Familie auf ${}^\omega\omega$. $|\mathcal{B}| = b(\aleph_0)$. Dann ist $\{u(f) \mid f \in \mathcal{B}\}$ unbeschränkt in ${}^{\aleph_\omega}\aleph_\omega$.

„$d(\aleph_0) \leq d(\aleph_\omega)$"

Ist $D \subseteq {}^{\aleph_\omega}\aleph_\omega$ dominierend, so ist $\{d(f) \mid f \in D\}$ dominierend in ${}^\omega\omega$.

<u>Def.</u> Ein Predictor $\pi = (D, (\pi_\beta \mid \beta \in D))$ wobei

$D \in [\kappa]^\kappa$ und

$\pi_\beta : {}^\beta\kappa \to \kappa$

Wir sagen π sagt eine Fkt. $f \in {}^\kappa\kappa$ voraus, wenn die Menge

$$\{\beta \in D \mid \pi_\beta(f \restriction \beta) \neq f(\beta)\}$$

$< \kappa$ groß ist.

Sonst vermeidet f predictor π.

<u>Sei $\kappa = \kappa^{<\kappa}$.</u>

$e(\kappa) := \min\{|\mathcal{E}| \mid \mathcal{E} \subseteq {}^\kappa\kappa$ so dass kein predictor π sagt alle $f \in \mathcal{E}$ richtig voraus$\}$.

<u>Prop</u> Sei $\kappa^{<\kappa}=\kappa$. Dann gibt es keinen predictor π für ganz ${}^{\kappa}\kappa$.

<u>Bew.</u> Angenommen $\pi=(D, (\pi_\alpha \mid \alpha\in D))$ ist predictor für ganz ${}^{\kappa}\kappa$.

$$\mathcal{F}:=\{f\in{}^{\kappa}\kappa \mid f(\alpha)=0 \quad \forall\alpha\in\kappa\setminus D\}$$

$|\mathcal{F}|=2^{\kappa}$

Für $f\in\mathcal{F}$ sei $\alpha_f<\kappa$ mit

für alle $\beta\geq\alpha$ $\pi_\beta(f\restriction\beta)=f(\beta)$.

OBdA sei $\alpha=\alpha_f$ für alle $f\in\mathcal{F}$.

$|\{f\restriction\alpha \mid f\in\mathcal{F}\}|\leq\kappa^{\alpha}\leq\kappa^{<\kappa}=\kappa$.

Seien $f\neq g$ aus $\mathcal{F}$ mit $f\restriction\alpha=g\restriction\alpha$.

Es gibt $\beta>\alpha$ minimal mit $f(\beta)\neq g(\beta)$

Widerspruch zu π predictor an der Stelle β. $\square$

<u>Corrollor</u> $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ dann gibt es keinen predictor für $\aleph_1 \aleph_2$.

<u>Problem</u> Ist die Existenz von einem predictor für $\aleph_2 \aleph_2$ konsistent?

Prop. $e(\kappa) \le d(\kappa)$ für $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Bew. Sei D dominierend für ${}^\kappa\kappa$ und angenommen mit $|D| = d(\kappa)$.

$d(\kappa) < e(\kappa)$.

Sei $(A, (\pi_\beta \mid \beta \in A))$ ein predictor für D

und identifiziere diesen predictor mit

$$\pi : \bigcup_{\beta \in A} {}^\beta\kappa \to \kappa$$

$\pi(s) = \pi_{|s|}(s)$, $|s|$ Länge der Folge s.

Wegen $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ betrachte π als Fkt von κ nach κ.

Sei also $f \in D$ mit $\pi(s) < f(s)$ für alle $s \in \bigcup_{\beta \in A} {}^\beta\kappa$

$f : \bigcup_{\beta \in A} {}^\beta\kappa \to \kappa$ bis auf weniger als κ-viele

Definiere $g : \kappa \to \kappa$ $\quad g(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \kappa \setminus A$

und $g(\alpha) := f(g \restriction \alpha)$.

Es gibt $h \in D$ mit $g \leq^* h$.

Für dieses h ist die Menge

$$\{ \alpha \in A \mid \bar{\pi}_\alpha (h \restriction \alpha) = h(\alpha) \}$$

hat Kardinalität $< \kappa$.

Widerspruch zu $\bar{\pi}$ predictor für D. $\square$