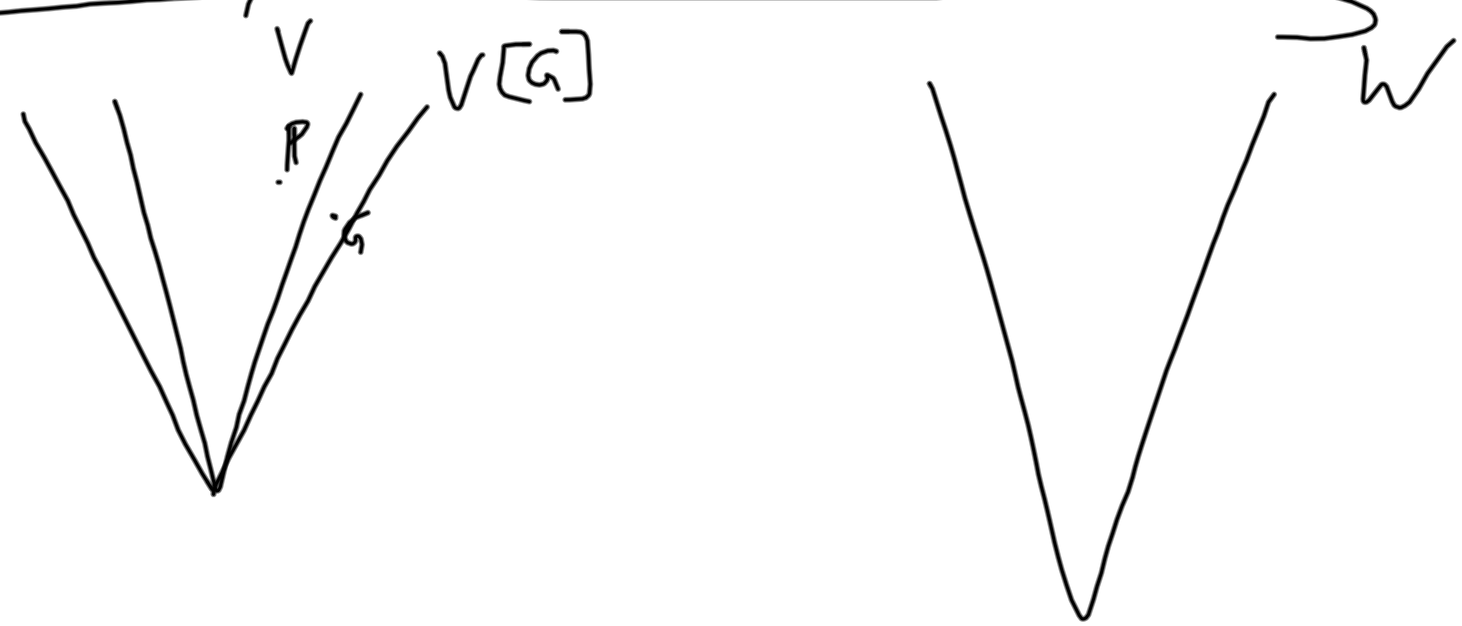
Definability of Ground Models



Thm: Sei $V \models ZFC$, $\mathbb{P} \in V$, $G \subseteq \mathbb{P}$ gen. über V. Dann ist in $V[G]$ das Grundmodell V definierbar aus dem Parameter $\mathcal{P}(\delta)^V$, wobei $\delta > |\mathbb{P}|$.

Def: Seien $V, W \models ZFC$ transitiv, $V \subseteq W$, $\delta > \omega$ reg. Kardinalzahl.

(1) $V \subseteq W$ haben die δ-Überdeckungs gdw. es für jedes $A \in W$ mit $A \subseteq V$ und $|A|^W < \delta$ ein $B \in V$ gibt mit $|B|^V < \delta$ und $A \subseteq B$.

(2) $V \subseteq W$ haben die δ-Approximierungseigenschaft gdw. für alle κ mit $cf(\kappa)^W \geq \delta$ und jede $\subseteq$-aufsteigende Kette $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ von V bereits $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in V$.

Thm: Sei $\delta > \omega$ eine reg. Kardinalzahl.
Seien $M, N, V \models ZFC$ transitiv mit
$ord(M) = ord(N) = ord(V)$ und
$M, N \subseteq V$ die δ-Überdeckungs- und Approximierungseigenschaft erfüllen,
$(\delta^+)^V = (\delta^+)^N = (\delta^+)^M$ und

$$\mathcal{P}(\delta)^N = \mathcal{P}(\delta)^M.$$

Dann:

(1) $M = N$

(2) N ist uniform Σ_2-definierbar aus $\mathcal{P}(\delta)^N$.

Beweis:

Zeige durch Rekursion über γ, dass

$$\forall \gamma \in On\ \forall A \subseteq \gamma : A \in M \iff A \in N.$$

Für $\gamma \leq \delta$: ✓

Aus der Ind.-Ann. für geg. γ folgt bereits:

- M, N haben die gleichen Kardinalzahlen $\leq \gamma$
- γ ist keine Kardinalzahl $\Rightarrow \mathcal{P}(\gamma)^M = \mathcal{P}(\gamma)^N$.

Also sei o.B.d.A. $\gamma > \delta$ eine Kardinalzahl in M und N.

Unterscheide Fälle:

1) $cf(\gamma) \geq \delta$

2) $cf(\gamma) < \delta$

$|A| < \delta$ $\qquad$ $|A| \geq \delta$

① $cf(\gamma) \geq \delta$

Beh: $A \in M \underset{\delta\text{-approx}}{\Longleftrightarrow} A \cap \alpha \in M \quad \forall \alpha < \gamma$

$\Longleftrightarrow A \cap \alpha \in N$

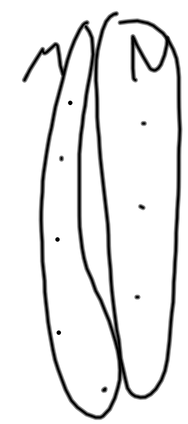
$\Longleftrightarrow A \in N.$

②a) $cf(\gamma) < \delta$, $|A| < \delta$

Definiere Sequenzen $\langle E_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$, $\langle F_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ von Teilmengen von γ s.d.

$$|E_\alpha|, |F_\alpha| < \delta, \quad A \subseteq E_0, \quad E_\alpha \subseteq F_\alpha,$$

$$\bigcup_{\alpha < \beta} F_\alpha \subseteq E_\beta, \quad E_\alpha \in M, \quad F_\alpha \in N.$$



Nach δ-Approx ist $E := \bigcup_{\alpha \in \delta} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \delta} F_\alpha \in M \cap N$.

Sei $\theta := otyp(E)$ und $\pi : E \twoheadrightarrow \theta$ Mostowski-Kollaps.

Dann ist $\pi \in M \cap N$. Es ist $\theta < \delta^+ = (\delta^+)^M = (\delta^+)^N$.

Somit (IH):

$$A \in M \Longleftrightarrow \pi[A] \in M \Longleftrightarrow \pi[A] \in N \Longleftrightarrow A \in N.$$

② b) $\gamma > \delta$, $cf(\gamma) < \delta$, $|A| \geq \delta$

<u>Beh:</u> $A \in M$ gdw.

$(i)_M$ $\forall \alpha < \gamma: A \cap \alpha \in M$

und $(ii)_M$ $\forall Z: \quad |Z| < \delta \wedge Z \in M$

$\Longrightarrow A \cap Z \in M.$

<u>Ann:</u> $(i)_M$ und $(ii)_M$ gelten.] Nimm hinreichend großes θ mit $cf(\theta) > \gamma$.

Definiere aufsteigende Ketten

$\langle X_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$, $\langle Y_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$

mit $X_\alpha \prec V_\theta$ und $Y_\alpha \prec V_\theta \cap M$, s.d.

$|X_\alpha|, |Y_\alpha| < \delta$, $A \in X_0$, $\sup(X_0 \cap \gamma) = \gamma$,

$X_\alpha \cap M \subseteq Y_\alpha$, $Y_\alpha \in M$ und $\bigcup_{\alpha \in \beta} (Y_\alpha \cup X_\alpha) \subseteq X_\beta$.

Sei $X := \bigcup_{\alpha<\delta} X_\alpha$, $Y := \bigcup_{\alpha<\delta} Y_\alpha$.

Dann sind: $X \prec V_\theta$.

$$Y = X \cap M \prec V_\theta \cap M.$$

Nach δ-Approx: $Y \in M$.

Nach $(ii)_M$: $A \cap Y_\alpha \in M \quad \forall \alpha < \delta$.

Nach δ-Approx: $A \cap Y \in M$.

Für $\alpha \in Y \cap \gamma$ erhalten wir

- $A \cap \alpha \in Y$, da $A \in X$, somit $A \cap \alpha \in X$, und $A \cap \alpha$ nach $(i)_M$.
- Für jedes $b \in Y$:
  - Wenn $b \cap Y = (A \cap Y) \cap \alpha$, so ist $(Y \models b = A \cap \alpha) \Longrightarrow b = A \cap \alpha$.

Somit ist $\langle A \cap \alpha \mid \alpha \in Y \cap \gamma \rangle$ definierbar in M mit Parametern γ, Y und $A \cap Y$.

Also: $\langle A \cap \alpha \mid \alpha \in Y \cap \gamma \rangle \in M$

$$\overset{\delta\text{-Approx}}{\Longrightarrow} A \in M.$$

$A \in N$

$\Longleftrightarrow$ Es gibt hinreichend große reguläre Kardinalzahl θ und $M \subseteq V_\theta$ mit $M \models ZFC - \text{Powerset}$ s.d. $M \subseteq V_\theta$ δ-Überdeckung und δ-Approx. erfüllt und $M \cap \mathcal{P}(\delta) = N \cap \mathcal{P}(\delta)$ und $A \in M$.