Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{P}\mathbb{N}$:

$A \sim_* B$ wenn $|A \triangle B|$ endlich ist.

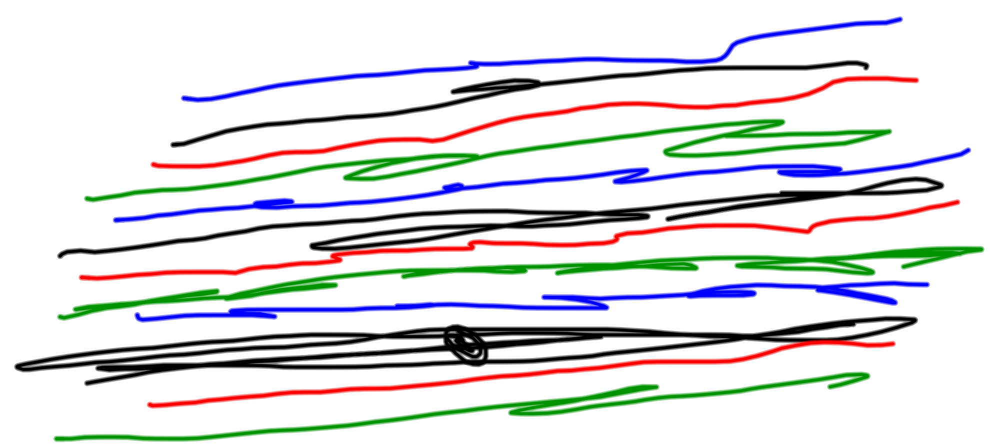
$A \sim_0 B$ wenn $A \sim_* B$ und
$|A \setminus B| = |B \setminus A|$

$A \sim_k B$ wenn $A \sim_* B$ und
$|A \setminus B| \equiv_k |B \setminus A|$

Ein 2-<u>Chameleon</u> ist eine Abbildung

$$\chi : \mathcal{P}\mathbb{N} \to \{0,1\} \text{ mit}$$

$$\chi(A+a) \neq \chi(A) \text{ für } a \notin A$$



Def: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$,

Sei X eine Menge mit einem Endomorphismus s. Ein X-Chameleon ist eine Abbildung

$\chi : \mathcal{P}\mathbb{N} \longrightarrow X$ mit

$$\chi(A+a) = s(\chi(A)) \text{ für } a \notin A.$$

Ein k-Chameleon ist ein $\mathbb{Z}_k$-Chameleon

″ 0- ″ ″ $\mathbb{Z}$- ″

$AC \Rightarrow (\exists\ k\text{-Chameleon})$ für $k \in \mathbb{N}$.

0-Cham: Wähle ein $\sim_0$-Äquivalenzklasse in jede $\sim_*$-Äquivalenzklasse.

Sei $\chi(A) = \chi(B) + |A \setminus B| - |B \setminus A|$,

wobei $A \sim B$, B in der ausgewählte Äquivalenzklasse.

$AD \Rightarrow (\nexists \text{ 2-Chameleon})$.

Angenommen: χ ein 2-Cham.

Adam + Eve spielen gegeneinander.

Züge: natürliche Zahlen a_n e_n

$e_n > a_n$, $a_{n+1} > e_n$

Adam gewinnt wenn $\chi(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \chi(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\})$

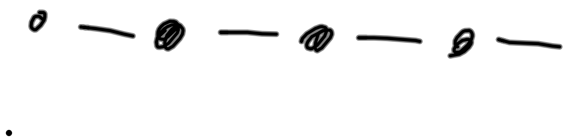
Adam hat ein Gewinnstrategie:

Eve spielt 2 Kopien parallel

A	E	A	E
a_0	$e_0 = a_0 + 1$	$a_0' = a_0$	$e_0' = a_1$
a_1	$e_1 = a_1'$	a_1'	$e_1' = a_2$
a_2	$e_2 = a_2'$	a_2'	

$$\begin{array}{ccc}
\chi(\{a_i \mid i \in N\}) & = & \chi(\{e_i \mid i \in N\}) \\
\| & & \nparallel \\
\chi(\{e_i \mid i \in N\}) & = & \chi(\{a_i \mid i \in N\})
\end{array}$$

$\#$

AD $\Rightarrow$ ($\nexists$ 0-Chameleon) 

(0-Chameleon $\Rightarrow$ 2 Chameleon)

A dom: $\chi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in S$

2 Kopien: $\chi(S_1) = \chi(S_2) + 1$

$\rightsquigarrow$ Funktioniert nur wenn $2 \mid k$

$$k \mid l \Rightarrow (l\text{-Cham} \Rightarrow k\text{-Cham})$$

$$(k, l\text{-Cham}) \Rightarrow (kl\text{-Cham})$$

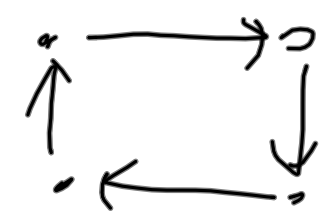
$(k,l) = 1$

$$X, Y\text{-Cham} \Rightarrow X \times Y\text{-Cham}.$$

$\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l \cong \mathbb{Z}_{k \times l}$ für $(k,l) = 1$.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$\mathbb{Z}_4$:



p-Cham $\Rightarrow$ p^n-Cham.

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich. Dann

$\exists!\ \delta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ wachsend mit bild A.

$$A \circ B = \text{Bild}(\delta_A \cdot \delta_B)$$

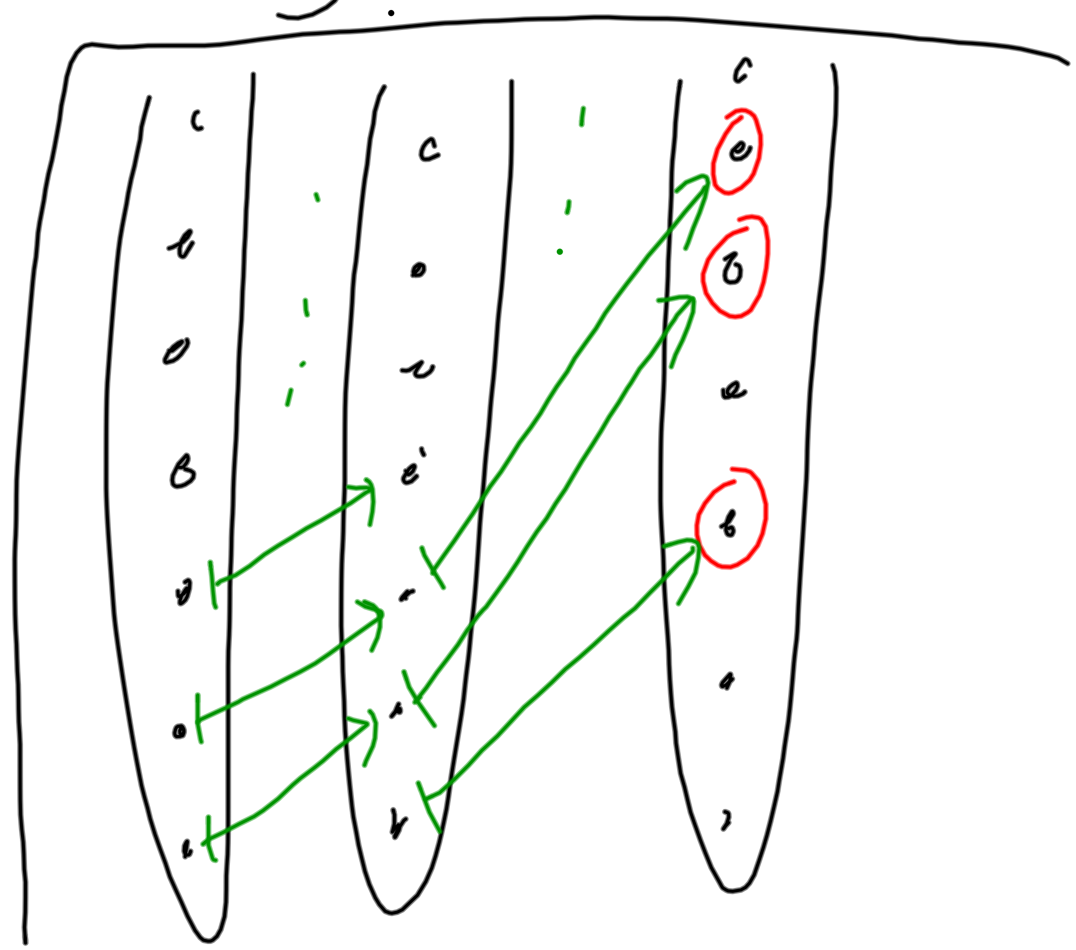
$$A' = A - \min(A) = A \cdot D, \text{ wobei } D = \mathbb{N} - 0$$

$$(m)_n = \{ l \in \mathbb{N} \mid l \underset{n}{\equiv} m \}$$

$$D \cdot (m)_n = (m+1)_n$$

$$m < n-1$$

$$D \cdot (n-1)_n = (0)_n \cdot D$$



Sei X eine Menge mit Endomorphismus

$$X^{\circlearrowleft n} = X^n \text{ mit Endomorphismus:}$$

$$s: (x_0 \ldots x_{n-1}) \longmapsto (x_1 \ldots x_{n-1}, s(x_0))$$

X - Chain χ : $\chi(A') = s(\chi(A))$

$X^{\langle n \rangle}$ - Chain χ' : $A \longmapsto (\chi(A\cdot(0)_n), \chi(A\cdot(1)_n), \ldots \chi(A\cdot(n-1)_n))$

$$\chi'(A\cdot D) = (\chi(A\cdot D\cdot(0)_n), \ldots \chi(A\cdot D\cdot(n-1)_n))$$

$$= (\chi(A\cdot(1)_n), \ldots, \underbrace{\chi(A\cdot(0)_n\cdot D)}_{s(\chi(A\cdot(0)_n)})$$

$$= s(\chi'(A))$$

$\mathbb{Z}_{p^n}^{n}$ besteht aus Kopien von $\mathbb{Z}_{p^{n+1}}$:

Sei $m = (m_0 \dots m_{p^n-1}) \in \mathbb{Z}^{n}$

$$s^{p^n}(m) = (m_0 + p^{n-1}, m_1 + p^{n-1}, \dots m_{p^n-1} + p^{n-1})$$

$$s^{p^{n+1}}(m) = m$$

$$s^k(m) = m \Rightarrow p^n \mid k \qquad \square$$

$\omega \xrightarrow{\triangle} (\omega)_2^\omega$:

Eine Färbung $c : [\omega]^\omega \longrightarrow 2$

ist invariant, wenn $c(A') = c(A)$

für $A \in [\omega]^\omega$

Jede invariante Färbung hat eine unendliche monochromatische Klasse $A \in [\omega]^\omega$.

__Lemma__ $\left(\omega \xrightarrow{\Delta} (\omega)^{\omega}_2\right)$:

Wenn es ein k-Chameleon gibt, dann gibt es auch ein 2-Chameleon.

Sei χ ein k-Chameleon. $s:(m,n)\mapsto(n,m+1)$

Sei $\chi' : [\omega]^{\omega} \longrightarrow \mathbb{Z}_k^{2}$ ein $\mathbb{Z}_k^{2}$-Cham wie vorher $\left[A \longmapsto \left(\chi(A\cdot(0)_2), \chi(A\cdot(1)_2)\right)\right]$

Sei $C \subseteq \mathbb{Z}_k^{2}$ die Menge

$\{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2) \dots (k-1,0)\}$

$$A' \longmapsto \Big(X\big(A \cdot D \cdot (0)_2\big), X\big(A \cdot D \cdot (1)_2\big) \Big)$$

$$A' = A \cdot D$$

$$= \Big(X\big(A \cdot (1)_2\big), X\big(A \cdot (0)_2 \cdot D\big) \Big)$$

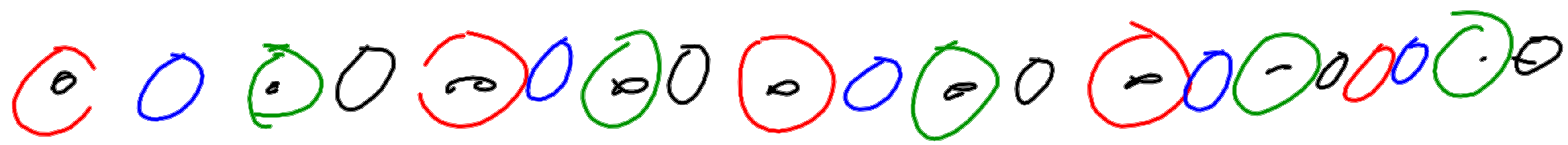
Ziel: ein $A \in [\omega]^\omega$ mit $(X')''[A]^\omega = C$

(dann $B \longmapsto X'(A \cdot B)$ ein $2k$-Chameleon)

Färbung: A ist rot, wenn $\chi'(A) \in C$

" grün " $\notin C$

Sei A monochromatisch.



$A \circ (i)_{k+1}$

Folge x: $\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{-1\ 0\ 1}\ \underline{-1\ 0\ 1}\ \underline{-2\ -1\ 0\ 1\ 2}\ \underline{-2\ -1\ 0\ 1\ 2}\ \ldots$

$S_a: \{n \mid x_n = a\}$

$(S_a)_{a \in \mathbb{Z}}$: $\mathcal{D} S_a \sim_2 S_{a+1}$

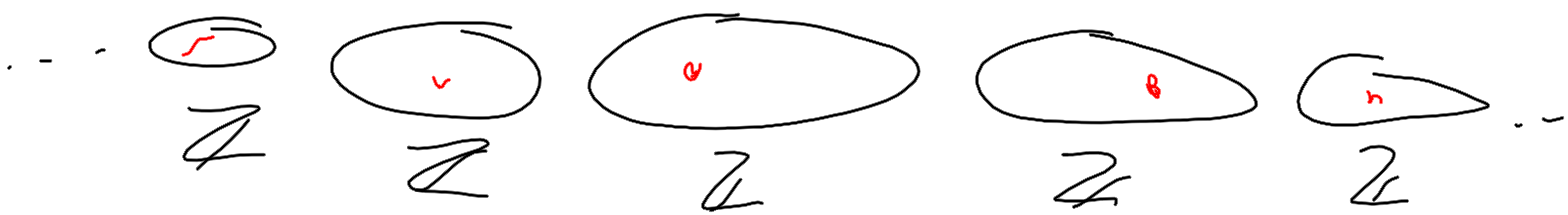
Sei X ein $\mathbb{Z}$-Chamaeleon.

A ist gade, wenn alle $X(A \cdot S_a)$ gleich sind.

<u>Lem</u>: A gerade $\Longleftrightarrow$ A' gerade

<u>Bew</u>: $\chi(A\cdot D\cdot S_a) = \chi(A\cdot S_{a+1})$

<u>Lem</u>: Sei $c : (\mathbb{Z}^2, <_{lex}) \longrightarrow 2$ eine Färbung. Dann gibt's eine monochromatische Teilmenge, die wie $\mathbb{Z}$ geordnet ist.



Sei $(q_i \mid i \in \mathbb{N})$ eine aufzählung von $\mathbb{Z}^2$

$$q_1 \leq q_4 \leq q_0 \leq q_5 \leq q_2 \leq q_3$$

bzgl $<_{lex}$.

Folge: $\underline{q_0}\ \underline{q_0}\ \underline{q_1 q_0}\ \underline{q_1 q_0}\ \underline{q_1 q_0 q_2}\ \underline{q_1 q_0 q_2}$

$\underline{q_1 q_0 q_2 q_3}\ \underline{q_1 q_0 q_2 q_3}\ \ldots$

Sei T_q gleich $\{n \mid y_n = q\}$

Färbe q mit Farbe $\chi(T_q)$, $q \in \mathbb{Z}^2$

Sei Q eine non. Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$, die wie $\mathbb{Z}$ geordnet ist.

Sei R eine unendliche Teilmenge von $\{i \mid q_i \in Q\}$, so dass $q_{R(2i)} < q_{R(2(i-1))}$

$q_{R(2i+1)} > q_{R(2i-1)}$

Sei $A = \bigcup_{i \in R} T_{q_i}$

A ist gade.

Färbe $[\omega]^\omega$, A rot wenn A gade
" grün " nicht gade

Sei A monochromatisch. Dann sind alle Teilmengen von A gade.

Jetzt Färbe $[A]^\omega$ B ist Blau wenn $\chi(B \cdot S_0) = 0$
" Gelb " $\chi(B \cdot S_0) = 1$

Sei B eine monochromatische Teilmenge von A. : $\forall E \in [B]^{\omega}$,

$\chi(E \cdot S_0)$ gleich

Aber, es gibt $E_1, E_2 \subseteq B$

s.d. $E_1 \cdot S_0 = E_2 \cdot S_0 \cdot D = E_2 \cdot S_1$

so dass $\chi(E_1 \cdot S_0) \neq \chi(E_2 \cdot S_0)$ ##

So :