

Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{P}N$:

$A \sim_* B$ wenn $|A \Delta B|$ endlich ist.

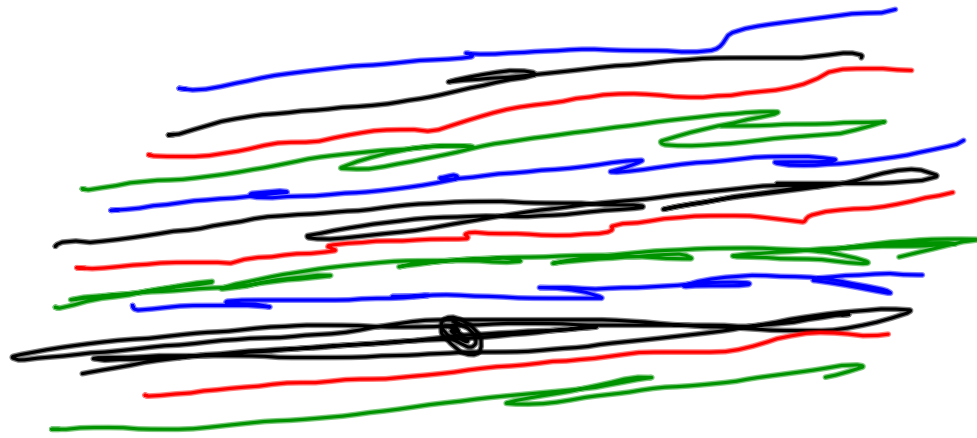
$A \sim_0 B$ wenn $A \sim_* B$ und
 $|A \setminus B| = |B \setminus A|$

$A \sim_k B$ wenn $A \sim_* B$ und
 $|A \setminus B| \equiv_k |B \setminus A|$

E in 2-Chameleon ist eine Abbildung

$$\chi: \mathcal{P}N \rightarrow \{0,1\} \text{ mit}$$

$$\chi(A+a) \neq \chi(A) \text{ für } a \notin A$$



Def: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$,

Sei X eine Menge mit einem Endomorphismus

s . Ein X -Chanelon ist eine Abbildung

$$\chi: \mathcal{P}\mathbb{N} \rightarrow X \text{ mit}$$

$$\chi(A+a) = s(\chi(A)) \text{ für } a \in A.$$

Ein k -Chanelon ist ein \mathbb{Z}_k -Chanelon

" 0 - " " \mathbb{Z} - "

$AC \Rightarrow (\exists k\text{-Chanelcon})$ für $k \in \mathbb{N}$.

0-Chom: Wähle ein \sim_0 -Äquivalenzklasse
in jede \sim_* -Äquivalenzklasse.

Sei $\chi(A) = \chi(B) + |A \setminus B| - |B \setminus A|$,

wobei $A \sim B$, B in der ausgewählte
Äquivalenzklasse.

$AD \Rightarrow (\nexists 2\text{-Chameleon})$.

Angenommen: χ ein 2-Cham.

Adam + Eve spielen gegeneinander.

Züge: natürliche Zahlen a_n, e_n

$$e_n > a_n, a_{n+1} > e_n$$

Adam gewinnt wenn $\chi(\{a_n | n \in \mathbb{N}\}) = \chi(\{e_n | n \in \mathbb{N}\})$

A dem hat ein Gewinnstrategie:

Eve spielt 2 kopien parallel

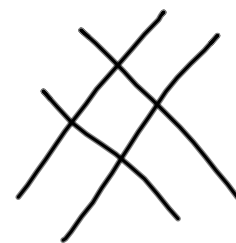
A	E	A	E
a_0	$e_0 = a_0 + 1$	$a'_0 = a_0$	$e'_0 = a_1$
a_1	$e_1 = a'_1$	a_1	$e'_1 = a_2$
a_2	$e_2 = a'_2$	a_2	

$$\chi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \chi(\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\})$$

||

||

$$\chi(\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \chi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})$$



$AD \Rightarrow (\nexists 0\text{-Chameleon}) \dots$

$(0\text{-Chameleon} \Rightarrow 2\text{-Chameleon})$

A dom: $\mathcal{X}(\{a_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{e_i | i \in \mathbb{N}\}) \in S$

2 Kopien: $\chi(s_1) = \chi(s_2) + 1$

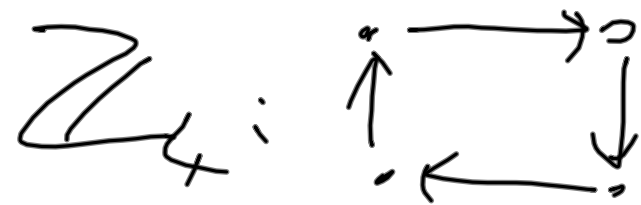
$\dots \rightarrow$ Funktioniert nur
wenn $2|k$

$$k|l \Rightarrow (l\text{-Cham} \Rightarrow k\text{-Cham})$$

$$\begin{aligned} (k, l\text{-Cham}) &\Rightarrow (kl\text{-Cham}) \\ (k, l) &= 1 \end{aligned}$$

$$X, Y\text{-Cham} \Rightarrow X \times Y\text{-Cham}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2: \quad \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l \cong \mathbb{Z}_{kl} \text{ für } (k, l) = 1.$$



p -Cham $\Rightarrow p^n$ -Cham.

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich. Dann

$\exists!$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wachsend mit bild A .

$$A \circ B = \text{Bild}(f_A \cdot f_B)$$

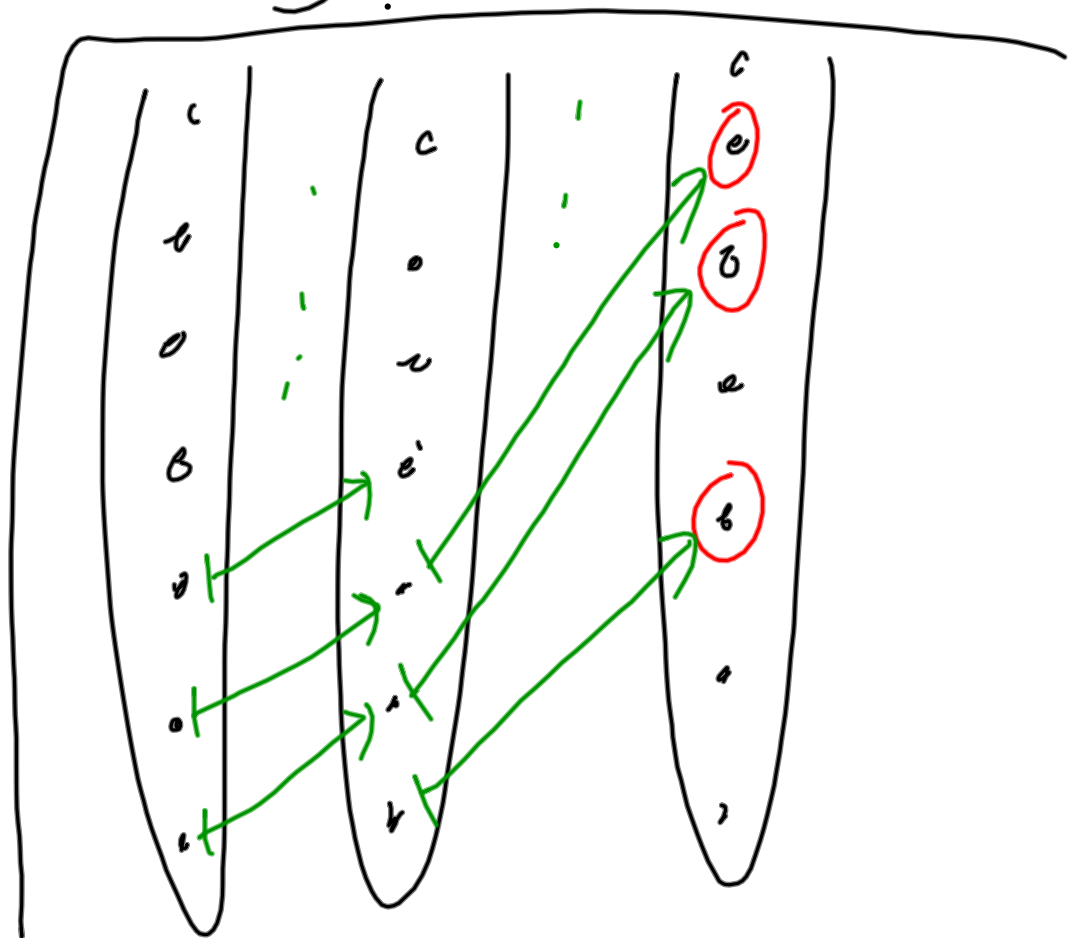
$$A' = A - \min(A) = A \cdot D, \text{ wobei } D = N - 0$$

$$\binom{m}{n} = \left\{ L \in N \mid L \stackrel{n}{\cong} m \right\} \quad \vdots$$

$$D \cdot \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$$

$$m < n-1$$

$$D \cdot \binom{n-1}{n} = \binom{0}{n} \cdot D$$



Sei X eine Menge mit Endomorphismus

$X^{\textcircled{n}} = X^n$ mit Endomorphismus:

$$S: (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, S(x_0))$$

$$X - \text{Chain } \mathcal{X} \quad \mathcal{X}(A') = s(\mathcal{X}(A))$$

$$X^{(n)} - \text{Chain } \mathcal{X}' : A \mapsto (\mathcal{X}(A \cdot (0)_n), \mathcal{X}(A \cdot (1)_n), \dots, \mathcal{X}(A \cdot (n-1)_n))$$

$$\mathcal{X}'(A \cdot D) = (\mathcal{X}(A \cdot D \cdot (0)_n), \dots, \mathcal{X}(A \cdot D \cdot (n-1)_n))$$

$$= (\mathcal{X}(A \cdot (1)_n), \dots, \underbrace{\mathcal{X}(A \cdot (0)_n \cdot D)}_{s(\mathcal{X}(A \cdot (0)_n))})$$

$$= s(\mathcal{X}'(A))$$

$\mathbb{Z}_{p^n}^{(n)}$ besteht aus Kopien von $\mathbb{Z}_{p^{n+1}}$:

Sei $m = (m_0 \dots m_{p^n-1}) \in \mathbb{Z}_{p^n}^{(n)}$

$$s^{p^n}(m) = (m_0 + p^{n-1}, m_1 + p^{n-1}, \dots, m_{p^n-1} + p^{n-1})$$

$$s^{p^{n+1}}(m) = m$$

$$s^k(m) = m \Rightarrow p^n \mid k \quad \square$$