Elementare Unterstrukturen.

$(V, \in)$.

Sei M eine Menge, $N \subseteq M$.

$(N, \in)$ ist elementare Unterstruktur von $(M, \in)$ gdw für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in N$ gilt:

$$(*) \quad (N, \in) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff (M, \in) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ heißt absolut zwischen M und N, falls f.a. $a_1, \ldots, a_n \in N$ $(*)$ gilt.

N el. Unterstr. von M schreiben wir als

$N \precsim M$.

<u>Ziel</u>: Wollen kleines M mit $M \precsim V$.

Problem: Geht nicht.

Approximation:

<u>Reflexionssatz (Levy)</u>: Sei $(W_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ eine aufsteigende Folge von Mengen mit

I. $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} W_\alpha$

II. Ist δ eine Limesordinalzahl, so gilt $W_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} W_\alpha$. (Stetigkeit)

Sei Φ endliche Menge von Formeln. Für alle $\alpha \in Ord$ ex $\beta \geq \alpha$, sodass alle Formeln aus Φ über W_β absolut sind. (absolut zwischen W_β und V).

Beispiel: Eine Folge die das tut:

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha),$$

δ Limeszahl: $V_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$.

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha.$$

$(V_\alpha, \in)$.

Satz von Löwenheim-Skolem: Sei κ unendliche Kardinalzahl, $A \subseteq M$ mit $|A| \leq \kappa$. Dann ex. $N \subseteq M$ mit $N \precsim M$ und $A \subseteq N$ mit $|N| \leq \kappa$.

Satz (Arhangelskii)

Def: Sei (X, τ) top. Raum. Dann heißt eine Familie $\mathcal{B}$ von offenen Teilmengen von X Basis der Top. τ, falls jede offene Menge in X Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ ist.
Das Gewicht von X ist die kleinste Mächtigkeit einer Basis. Gewicht von X heißt $w(X)$.

Sei X kompakt (und Hausdorff), $f: X \twoheadrightarrow Y$ stetig.
Dann gilt $w(Y) \leq w(X)$.

Man braucht Kompaktheit:

$X = \mathbb{R}^2$. Basis der Top:

$$\{U_{2^{-i}}(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{A_{2^{-i}}(x,0) : x \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$$

$$A_{2^{-i}}(x,0) = U_{2^{-i}}(x,0) \setminus \left(\overline{U_{2^{-i}}(x,2^{-i})} \cup \overline{U_{2^{-i}}(x,-2^{-i})}\right) \cup \{(x,0)\}.$$

$\mathbb{R}^2$ mit dieser Top hat Gewicht $2^{\aleph_0}$

Nenne diese Top. τ.

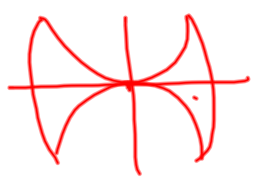
Sei σ die Top. auf $\mathbb{R}^2$, die die folgende Basis hat:

$$\{U_{2^{-i}}(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \neq 0,\ i\in\mathbb{N}\} \cup$$

$$\{U_{2^{-i}}(x,0) \cap x\text{-Achse} : x \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}.$$

$w(\mathbb{R}^2, \sigma) = \aleph_0.$

$\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, \sigma) \to (\mathbb{R}^2, \tau)$ ist stetig.



$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein Netzwerk für X, falls für alle $x \in X$ und offenen $O \subseteq X$ mit $x \in O$ ein $A \in \mathcal{C}$ ex. mit $x \in A \subseteq O$.

$nw(X)$ ist die kleinste Mächtigkeit eines Netzwerks.

Ist $f: X \to Y$ stetig und surjektiv, so gilt $nw(Y) \leq nw(X)$.

<u>Satz</u> Ist X kompakt, so gilt $nw(X) = w(X)$.

Beweis: $nw(X) \leq w(X)$ ist klar.

Sei N Netzwerk für X mit $|N| = nw(X) = \kappa$

Finde Basis mit Mächtigkeit κ.

Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ genügend groß. (Die endlich vielen Formeln, die uns interessieren, sollen über V_α absolut sein und V_α soll alle relevanten Objekte enthalten, zum Beispiel X und die Top. auf X.)

Sei $M \precsim V_\alpha$ so gewählt, dass $|M| = nw(X) = \kappa$.

$N \cup \{X, N, \tau\} \subseteq M$. $\underline{B = \tau \cap M}$.

Bew: $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Top.

Sei $U \in \tau$ und $x \in X$.

Für $y \in X \setminus U$ ex. offene, disj. Mengen U_y, V_y mit $x \in U_y$ und $y \in V_y$.

N Netzwerk $\Rightarrow$ ex. $A_y, B_y \in N$ mit $x \in A_y \subseteq U_y$ und $y \in B_y \subseteq V_y$.

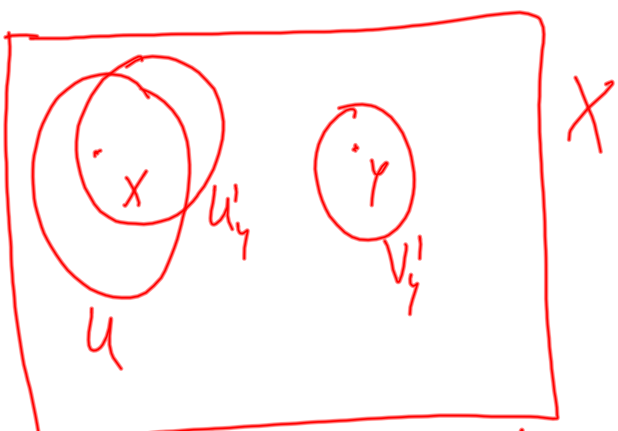
$V_\alpha \models \exists U_y', V_y' \in \tau (U_y' \cap V_y' = \emptyset \wedge A_y \subseteq U_y' \wedge B_y \subseteq V_y')$

$M \models \exists U_y', V_y' \in \tau (\dots)$

Wähle also U'_y, V'_y in M mit

$U'_y, V'_y \in \tau$, $A_y \subseteq U'_y$, $B_y \subseteq V'_y$,

$U'_y \cap V'_y = \emptyset$. $\quad X \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus U} V'_y$



Es gibt eine endliche Menge $F \subseteq X \setminus U$ mit $X \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in F} V'_y$

Es gibt eine endliche Menge $\{V'_{y_1}, \dots, V'_{y_n}\} \in M$ mit $X \setminus U \subseteq V'_{y_1} \cup \dots \cup V'_{y_n}$.

$\{U'_y : y \in F\} \in M.$

$U' := \bigcap_{y \in F} U'_y \in M$

$x \in U' \in M.$ $U' \subseteq U.$ $\square$

$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ $f_\varphi : M^n \longrightarrow M$

$(b_1, \ldots, b_n) \longmapsto a$

$N \subseteq M$

$M \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n),$

falls $M \models \exists x\, \varphi(x, b_1, \ldots, b_n)$

X kompakt, erstes Abz. axiom

$\Longrightarrow |X| \leq 2^{\aleph_0}.$