<u>Satz</u> (Arhangelskii) Jeder ~~kompakte~~ Lindelöf Raum X, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, hat Mächtigkeit $\leq 2^{\aleph_0}$.

Bessere Submodelle:

<u>Lemma:</u> Sei $(N, \in)$ eine unendl. Struktur, die unter abzählbaren Folgen abgeschlossen ist.
(D.h., $x_i \in N$ f.a. $i \in \omega \Rightarrow (x_i)_{i\in\omega} \in N$)
Für alle $A \subseteq N$ mit $|A| \leq 2^{\aleph_0}$ ex. $M \precsim N$ mit $|M| = 2^{\aleph_0}$, $A \subseteq M$, M ist unter abzählbaren Folgen abgeschlossen.

<u>Beweis:</u>

Wähle $M_0 \preceq N$ mit $|M_0| = 2^{\aleph_0}$ und $A \subseteq M_0$. Konstruiere Folge $(M_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ mit:

$\alpha < \beta \Rightarrow M_\alpha \subseteq M_\beta$,

$\delta < \omega_1$ Limeszahl $\Rightarrow M_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha$,

Wenn $x_i \in M_\alpha$ f.a. $i \in \omega$

$\Rightarrow (x_i)_{i\in\omega} \in M_{\alpha+1}$. $\quad (M_\alpha \in M_{\alpha+1})$

$|M_\alpha| = 2^{\aleph_0}$, $M_\alpha \preceq N$

Keisler's Kettenlemma: $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha \preceq N$.

M leistet das Gewünschte. $\square$

Beweis des Satzes von Arhangelskii:

Sei X first countable und kompakt.

Wähle κ genügend groß (z.B. sollte $\mathrm{cf}\,\kappa > \aleph_0$ gelten)

Sei $M \precsim (V_\kappa, \in)$ mit $X, \ldots \in M$ und $|M| = 2^{\aleph_0}$. M unter abz. Folgen abg.

Zeigen: $X \subseteq M$.

Angenommen nicht. Sei $Y = X \cap M$.

Dann ist Y in X abgeschlossen.

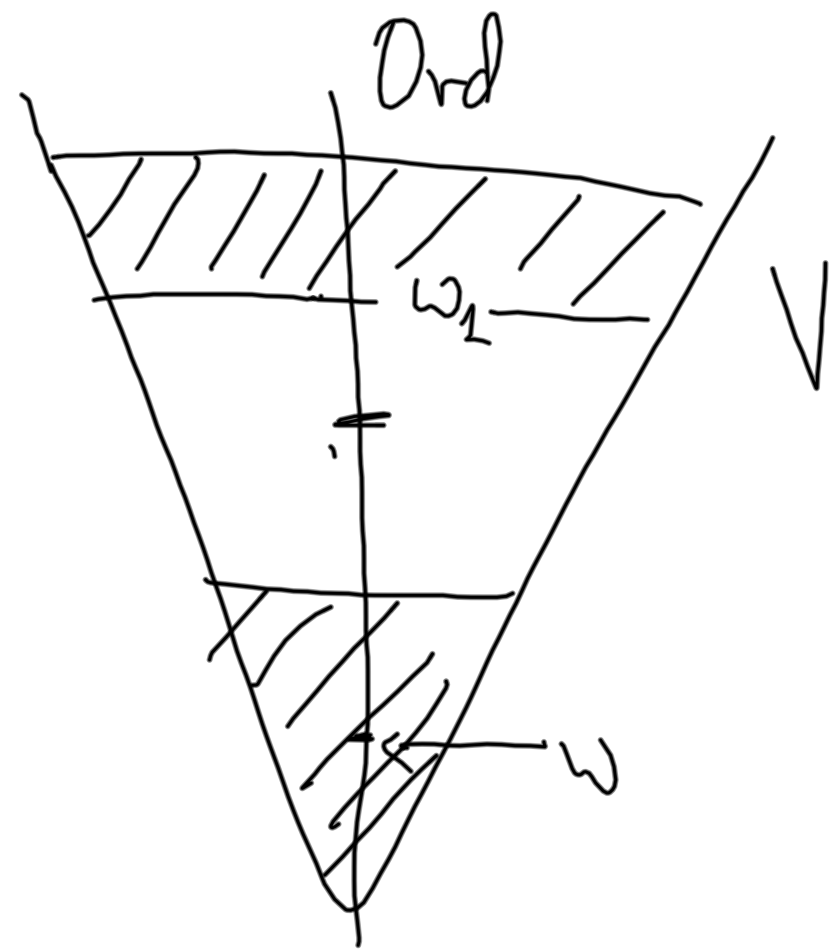
Sei $y \in \overline{Y}$. Dann ex. Folge $(y_n)_{n\in\omega}$ in Y, die gegen y konvergiert. $(y_n)_{n\in\omega} \in M$. Dann ist $y \in M$.

$\Rightarrow \overline{Y} = Y$.

Annahme: $X \neq Y$.

Dann ex $x \in X \setminus Y$.

Für $y \in Y$ kennt M eine abzählbare Umgebungsbasis B_y von y.



Wissen: $\omega \subseteq M$, $\omega \in M$

Ist $a \in M$ mit $|a| = \aleph_0$, so ex. in M eine Bijektion $f: \omega \to a$.

$\omega \subseteq M \Rightarrow f[\omega] = a \subseteq M$.

Wissen jetzt: $B_y \subseteq M$.

Für jedes $y \in Y = X \cap M$ wähle

$U_y \in B_y$ mit $x \notin U_y$. $U_y \in M$.

$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_y$. Y abgeschl. $\Rightarrow$ kompakt

$\Rightarrow$ ex. $y_1, \dots, y_n \in Y$ mit $Y \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$.

$V_K \models U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} \neq X$.

$M \models U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} \neq X$

$\Rightarrow$ ex. $y \in \underbrace{X \cap M}_{= Y}$ mit $y \notin U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ $\lightning$ $\square$

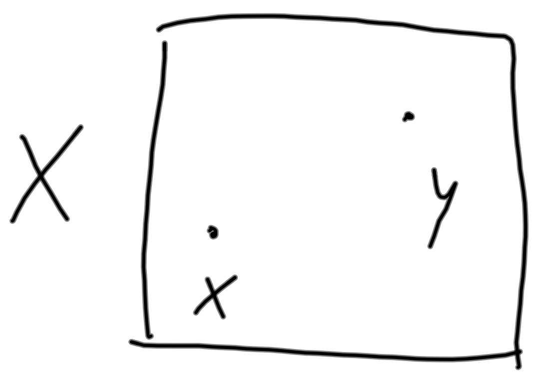
Konstruiere $(M_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ von abzählbare Submodellen mit $M_\alpha \in M_{\alpha+1}$. ($\Rightarrow M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$)

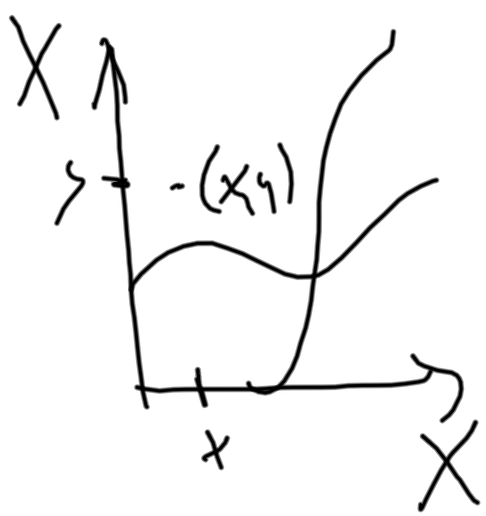
Sei $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$. $\qquad |M| = \omega_1$.

Ist $A \subseteq M$ abzählbar, so existiert ein $B \in M$ mit $|B| = \aleph_0$ und $A \subseteq \underset{M_\alpha}{\overset{\shortparallel}{B}}$.

Sei X top. Raum.

Dann ist die Transitivitätszahl von X die kleinste Mächtigkeit einer Familie $\mathcal{F}$ von stetigen Funktionen von X nach X, so dass gilt: f.a. $x, y \in X$ ex. $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) = y$ oder $f(y) = x$.





Satz (Kuratowski):

Sei κ eine unendl. Kardinalzahl. Dann ist die Transitivitätszahl von κ^+ (mit der diskr. Top) genau κ.

Beweis: Für jedes $\alpha < \kappa^+$ wähle eine Surjektion $g_\alpha : \kappa \to \alpha + 1$.

Für $\beta < \kappa$ sei $f_\beta : \kappa^+ \to \kappa^+ ; \alpha \mapsto g_\alpha(\beta)$.

Beh: f.a. $\alpha, \gamma \in \kappa^+$ ex. $\beta < \kappa$ mit $f_\beta(\alpha) = \gamma$ oder $f_\beta(\gamma) = \alpha$.

Falls $\gamma \leq \alpha$, so wähle $\beta < \kappa$ mit

$$g_\alpha(\beta) = \gamma = f_\beta(\alpha)$$

...

ω^ω : Baire-Raum, 2^ω Cantorraum

$\mathfrak{d}$ ist die minimale Mächtigkeit einer Familie kompakter Teilmengen von ω^ω, die ω^ω überdeckt.

$\mathfrak{d} \leq$ Transitivitätszahl von 2^ω.

Einbettung von ω^ω nach 2^ω:

$$(n_0, n_1, n_2, \ldots) \longmapsto \underbrace{0\ldots0}_{n_0\text{-mal}}\,1\,\underbrace{0\ldots0}_{n_1\text{-mal}}\,1\,\underbrace{0\ldots0}_{n_2\text{-mal}}\,1\ldots$$

Wieder sei κ genügend groß.

Wähle Skolemfunktionen für V_κ.

Ist $M \precsim V_\kappa$ und $a \in V_\kappa$, so sei

$M[a]$ = Skolemhülle von $M \cup \{a\}$.

$M[a] \precsim V_\kappa$.

$d \leq$ Trans. 2^ω. $\quad 2^{\aleph_0}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \vee\!\!|$

Angenommen nicht. $d >$ Transzahl,

Sei $M \precsim V_\kappa$ mit $|M| =$ Transzahl,

M umfasst eine Familie von Fkt,

die transitiv auf 2^ω ist.

$|M| < 2^{\aleph_0} \Rightarrow$ ex. $x \in 2^\omega$ mit $x \notin M$.

$|M[x]| = |M| < d$. Es gibt $y \in \omega^\omega$,

das nicht Element einer kompakten TM von ω^ω

ist, die in $M[x]$ liegt. $e : \omega^\omega \to 2^\omega$. $e \in M$.

Sei $f \in M$, $f : 2^\omega \to 2^\omega$. $f(x) \neq e(y)$

$\ldots$

M umfasst trans. Fam.

$\Rightarrow$ ex $f \in M$ mit $f: 2^\omega \to 2^\omega$

und $f(e(y)) = x$.

$f^{-1}(x) \subseteq 2^\omega$ ist kompakt.

$2^\omega \setminus e[\omega^\omega]$ ist abzählbar

$\Rightarrow 2^\omega \setminus e[\omega^\omega] \subseteq M$.

$x \notin M \Rightarrow f^{-1}(x) \cap (2^\omega \setminus e[\omega^\omega]) = \emptyset$

$\Rightarrow f^{-1}(x)$ ist kompakt und $\subseteq e[\omega^\omega]$,

$\Rightarrow e^{-1}[f^{-1}(x)] \subseteq \omega^\omega$ ist kompakt.

$y \in \underbrace{e^{-1}[f^{-1}(x)]}_{\in M[x]}$ ein Wid. $\square$