

Zusammenfassung S Sprache: Konst., Funkt., Rel.-Symbole und Var.
 φ ein S -Formel oder S -Ausdruck def. man induktiv mit S -Termen und \exists, \forall Rel. Symd und $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall x, \exists x$.

DEF: φ ist ein S -Satz wenn φ keine freie Variablen enthält.
 zB $\forall x \forall y (\dot{R}(x,y) \rightarrow \dot{R}(y,x))$ ist ein Satz, aber $\forall y (\dot{R}(x,y) \rightarrow \dot{R}(y,x))$ nicht.

DEF: Eine S -Struktur ist $\mathcal{A} = (A, \underbrace{\overset{c^a}{\dots}}_{\text{Umformen (Terna)}}, \underbrace{f^a, \dots}_{\text{Konst. Lt}}, \underbrace{R^a, \dots}_{\text{Full-Lt}}, \underbrace{\dots}_{\text{Rel. Lt}})$

Idee: $\mathcal{A} \models \varphi$ soll heißen "φ gilt in \mathcal{A} "
 Wenn φ ein Satz ist dann ist \mathcal{A} annehmend
 Wenn φ aber kein Satz ist, brauchen wir auch eine Variablenbelegung $\beta: \text{Var}(S) \rightarrow A$

Def Eine S -Interpretation ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

Idee: $\mathcal{I} \models \varphi$ heißt "φ gilt in \mathcal{I} , wobei die Variablen durch β int. werden"

Def: (i) Sei t ein S -Term
 $\mathcal{I}(t) := \begin{cases} \beta(x) & \text{wenn } t = x \\ \overset{c^a}{c} & \text{wenn } t = \overset{c^a}{c} \\ f(\mathcal{I}(t_1), \dots, \mathcal{I}(t_n)) & \text{wenn } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$

(ii) $\mathcal{I} \models \varphi$: $\mathcal{I} \models (t_1 = t_2)$: gdw $\mathcal{I}(t_1) = \mathcal{I}(t_2)$
 $\mathcal{I} \models \dot{R}(t_1, t_2)$: gdw $(\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2)) \in \overset{R^a}{R}$
 $\mathcal{I} \models \neg \varphi$: gdw $\mathcal{I} \not\models \varphi$ (nicht $\mathcal{I} \models \varphi$)
 $\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi$: ...
 $\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi$: ...
 $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$: ... und $\mathcal{I} \models \varphi \leftrightarrow \psi$

$\mathcal{I} \models \forall x \varphi$: gdw für jeden $a \in A$ gilt $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$
 $\mathcal{I} \models \exists x \varphi$: gdw es gibt ein $a \in A$, so dass $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$

Beispiel: $S =$ Gruppensprache, $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, 0)$, $\beta(x) = 3$
 $\mathcal{I} \models x \cdot \overset{c^a}{e} = x$
 $\Leftrightarrow \mathcal{I}(x \cdot \overset{c^a}{e}) = \mathcal{I}(x)$
 $\Leftrightarrow \mathcal{I}(x) + \mathcal{I}(\overset{c^a}{e}) = \mathcal{I}(x)$
 $\Leftrightarrow 3 + 0 = 3$

Wenn Φ Menge von S -Formeln ist, dann $\mathcal{I} \models \Phi$ gdw $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$

Beispiel $\mathcal{I} \models \forall x (x \cdot \overset{c^a}{e} = x)$
 heißt $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$

Bemerkung Wenn φ ein Satz ist, sind Belegungen irrelevant, also schreibt man $\mathcal{A} \models \varphi$

Bemerkung 2 Sätze beschreiben die Struktur
 zB $\varphi \equiv \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x) \wedge \forall x (x \cdot x = x) \wedge \forall x \exists y (x \cdot y = \overset{c^a}{e})$

Dann ist $\mathcal{A} \models \varphi$ gdw \mathcal{A} eine Gruppe ist.

Beispiel $S = \{R\}$
 $\varphi = \forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
 Dann ist $(A, R) \models \varphi$ gdw R eine Ordnungsrelation ist auf A .

3.4. Folgerungsbeziehung
Beispiel Φ_{Gr} sind die Gruppensätze und sei φ irgendeine S -Formel
 Wann folgt φ aus Φ_{Gr} ?

Antwort 1 Wenn φ sich aus Φ_{Gr} "logisch ableiten" lässt (in endlich vielen Schritten)

Antwort 2 Wenn φ durch alle Gruppen erfüllt wird
 Heute!

Def Sei Φ eine Menge S -Formeln und φ S -Formel.
 Dann sagen wir " φ folgt aus Φ ", $\Phi \models \varphi$ gdw für alle S -Interpretationen \mathcal{I} gilt:
 wenn $\mathcal{I} \models \Phi$ dann $\mathcal{I} \models \varphi$

Frage Gilt immer $\Phi \models \varphi$ oder $\Phi \models \neg \varphi$? NEIN, zB: Φ_{Gr} und $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$

Frage Gilt immer $\mathcal{I} \models \varphi$ oder $\mathcal{I} \models \neg \varphi$? JA (per Def)

DEF (i) φ heißt allgemeingültig gdw. alle $\mathcal{I} \models \varphi$

(ii) φ heißt erfüllbar gdw es \mathcal{I} gibt, so dass $\mathcal{I} \models \varphi$

(iii) φ und ψ sind logisch äquivalent gdw $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \psi$

Aufgabe: φ ist allgemeingültig gdw $\emptyset \models \varphi$
 $\models \varphi$
 $\emptyset \models \varphi$ gdw $\emptyset \cup \{ \varphi \}$ nicht erfüllbar ist

Bemerkung: Da jede S-Formel logisch äquivalent ist an eine S-Formel die nur \wedge, \neg, \exists enthält, können wir oBdA annehmen, daß die Sprache nur \wedge, \neg, \exists als logische Symbole enthält. ($\forall x \varphi$ oder $\neg \exists x \neg \varphi$)

Koinzidenzlemma

Idee: Als wir $\mathcal{I} \models \varphi$ definiert haben, war immer die Sprache S festgelegt

Lemma: " $\mathcal{I} \models \varphi$ hängt nur von den S-Symbolen ab, die in φ vorkommen"

Formal: Seien S_1 und S_2 zwei Sprachen und $S = S_1 \cap S_2$
 Seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 S_1 - bzw. S_2 -Strukturen,
 β_1, β_2 \mathcal{A}_1 - bzw. \mathcal{A}_2 -Belegungen, und $A_1 = A_2$

Dann gilt

(a) Sei t ein S-Term. Wenn

$$\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1) \text{ und } \mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$$

auf allen in t vorkommenden Symbolen übereinstimmen,

$$\text{dann } \mathcal{I}_1(t) = \mathcal{I}_2(t)$$

(b) Sei φ S-Formel. Wenn \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 auf allen in φ vorkommenden Symbolen übereinstimmt,

$$\text{dann } \mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$$

Beweis: Aufgabe!

- (a) Induktion nach Aufbau der Terme
- (b) Induktion nach Aufbau der Formeln

3

3.5. Isomorphismen und Substrukturen

DEF: Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} S-Strukt. Dann ist

$\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein isomorphismus wenn

(1) π Bijektion zwischen A und B

(2) $\pi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für alle Konst. in S

(3) $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}}$ gdw $(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \in \mathcal{R}^{\mathcal{B}}$
 für alle R-Symb. in S

(4) $\pi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$
 für alle Funkt.-Symb. in S

Satz: Wenn \mathcal{A} und \mathcal{B} isomorph sind, dann gilt für jeden Satz φ
 $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$

Beweis: Eigentlich beweisen wir etwas stärkeres: für alle S-Formeln φ und alle Beleg. β gilt

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathcal{B}, \pi \circ \beta) \models \varphi$$

Beweis: Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ und $\mathcal{I}^{\pi} = (\mathcal{B}, \pi \circ \beta)$

(a) Zeig zuerst $\pi(\mathcal{I}(t)) = \mathcal{I}^{\pi}(t)$ für alle S-Terme

(b) Danach $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I}^{\pi} \models \varphi$.

Zu (a):
 - Wenn $t = x$: $\pi(\mathcal{I}(x)) = \pi(\beta(x)) = \pi \circ \beta(x) = \mathcal{I}^{\pi}(x)$
 - Wenn $t = c$: $\pi(\mathcal{I}(c)) = \pi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}} = \mathcal{I}^{\pi}(c)$

$$\begin{aligned} \text{- Wenn } t = f(t_1, \dots, t_n): \quad & \pi(\mathcal{I}(f(t_1, \dots, t_n))) = \\ & \stackrel{\text{Def}}{=} \pi(f^{\mathcal{A}}(\mathcal{I}(t_1), \dots, \mathcal{I}(t_n))) = \\ & \stackrel{\text{IH}}{=} f^{\mathcal{B}}(\pi(\mathcal{I}(t_1)), \dots, \pi(\mathcal{I}(t_n))) = \\ & \stackrel{\text{IH}}{=} f^{\mathcal{B}}(\mathcal{I}^{\pi}(t_1), \dots, \mathcal{I}^{\pi}(t_n)) = \mathcal{I}^{\pi}(f(t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

Zu (b). morgen!

4