


Das Logische Quadrat


"Syllogistik" ist eine bestimmte Art logischer Schlüsse
 (nach Aristoteles 300-400 v. Chr.)

4 Arten von Aussagen:

- Alle A sind B
- Keine A sind B
- Einige A sind B
- Einige A sind nicht B



Das Logische Quadrat zeigt die Beziehung zwischen diesen 4 Aussageformen.



2 Aussagen sind kontradiktorisch:

- können nicht gleichzeitig wahr sein und auch nicht gleichzeitig falsch.

Aussagen sind konträr:

- können nicht gleichzeitig wahr sein (wohl aber gleichzeitig falsch)

2 Aussagen sind subkonträr:

- können nicht gleichzeitig falsch sein (wohl aber gleichzeitig wahr)

Aussage Q ist subaltern zu Aussage P.

wenn P wahr ist, dann ist auch Q wahr

Beispiel aus der Math:

"Jede gerade Primzahl größer als 2 ist eine Primzahl"

A: Jede gerade Primzahl größer als 2
 B: ist eine Primzahl


⇒ Alle A sind B
 ⇒ Einige A sind B ?

Problem: Es könnte gar keine A geben!

Existenzielle Voraussetzung!
 "Wenn man ein A erwartet, dann existieren A"
 In der antiken Logik zulässig,
 in der modernen (math.) Logik nicht.

Das Logische Sechseck (Präsenzaufgabe)

"Sokrates ist ein A"



Aussagenlogik (Skript von Kiechle Wis 15/16)

- Wir haben Aussagen p, q, r, \dots die den Wahrheitswert Wahr (1) oder Falsch (0) bekommen
- Es gibt die 1-stellige Verknüpfung \neg "nicht"

- Es gibt 2-stellige Verknüpfungen

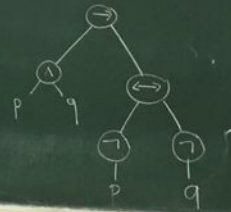
- $p \wedge q$ "p und q"
- $p \vee q$ "p oder q"
- $p \Rightarrow q$ "wenn p, dann q"
- $p \Leftrightarrow q$ "p gdw. q"

Formale Def: Was ist eine Aussage?

- p, q, r usw. sind (atomare) Aussagen
 - Wenn ϕ eine Aussage ist, dann ist $\neg\phi$ auch eine Aussage
 - Wenn ϕ und ψ Aussagen sind, dann sind $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ und $\phi \Leftrightarrow \psi$ auch Aussagen.
- (Klammern werden zu Verständlich benutzt)

Beispiel: (1) $p \wedge \wedge \vee \rightarrow \rightarrow \rightarrow q q$? Nein

(2) $(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \Leftrightarrow (\neg q)) \quad \exists a$



Def: Wenn der Wahrheitswert der atom. Aussagen (p, q) gegeben ist, dann lässt sich der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussagen berechnen:

Wahr. Tabellen

ϕ	$\neg\phi$
0	1
1	0

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \Leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Beispiel: Wahr. Tab von $p \wedge (\neg q) \vee r$

Bewertung	p	q	r	$\neg q$	$(\neg q) \vee r$	$p \wedge ((\neg q) \vee r)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1



Beispiel: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ "De Morgan"

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Beispiel: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

p	q	r	(q → r)	p → (q → r)	(p ∧ q)	(p ∧ q) → r
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Definition: Aussagen die immer (bei jeder Wahrheitswert der atom. Aussage p, q, ...) den Wahrheitswert 1 bekommen nennt man Tautologie

Beispiele: * $\neg p \leftrightarrow p$

* $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ } De Morgan

* $\neg(p \vee q) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$

* $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ (Modus Ponens)

* $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

* $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

*

*

Potenzmengenalgebra:

X = Grundmenge

$\mathcal{P}(X)$ = Potenzmenge

Wenn A, B ∈ $\mathcal{P}(X)$

- A ∩ B (Durchschnitt)

- A ∪ B (Vereinigung)

- \bar{A} (Komplement)



Frage: Was ist das Verhältnis zwischen Potenzmengenalgebra und Aussagenlogik?

"x ∈ A" = P

"x ∈ B" = Q

"x ∈ A ∩ B" = P ∧ Q

"x ∈ A ∪ B" = P ∨ Q

"x ∈ \bar{A} " = $\neg P$

Sei A = {x ∈ X | P(x)}

B = {x ∈ X | Q(x)}

$A \cap B = \{x \in X \mid P(x) \wedge Q(x)\}$

$A \cup B = \{x \in X \mid P(x) \vee Q(x)\}$

$\bar{A} = \{x \in X \mid \neg P(x)\}$