

Vollständigkeit

$$\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$$

Was wir zeigen: $\text{Con}(\Phi) \Rightarrow \text{Es gibt } \mathcal{I} \models \Phi$

IDEE: Ein Φ -kanonisches Modell (Termmodell)

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi$$

1

Vollst. Beweis:

1. Für bestimmte Art Φ existiert $\mathcal{I} \models \Phi$
2. Wenn Φ wid. frei, dann gibt es $\Phi^* \supseteq \Phi$ so dass $\mathcal{I} \models \Phi^*$ existiert.
3. $\mathcal{I} \models \Phi$

2

1 Ansatz: $\gamma \Phi$ (Φ ist Menge S-Formeln)

• Trägermenge $T^S = \{t \mid t \text{ S-Term}\}$

• $\dot{c}^{\gamma \Phi} := \dot{c}$

• $\dot{f}^{\gamma \Phi}(t_1 \dots t_n) := \dot{f}(t_1 \dots t_n)$

• $\dot{R}^{\gamma \Phi}(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow \Phi \vdash \dot{R}(t_1 \dots t_n)$

• $\beta(x) := x$ (für Variablen x)



Verwirrend

Syntaktische Objekte
werden zu formalen
Objekten im Modell!

3

Sieht gut aus, weil zB: $\gamma \Phi \vdash R(x) \Leftrightarrow \dot{R}^{\gamma \Phi}(x) \Leftrightarrow \Phi \vdash R(x)$

PROBLEM 1: Was wenn $\Phi \vdash t_1 = t_2$ aber t_1 und t_2 sind andere Terme?

DEF: $\sim_\Phi$ auf T^S als folgt: $t \sim_\Phi t'$ gdw $\Phi \vdash t = t'$

Lemma: $\sim_\Phi$ ist eine Äquv.-Rel. Und $t_1 \sim_\Phi t'_1 \dots t_n \sim_\Phi t'_n$

dann $f(t_1 \dots t_n) \sim_\Phi f(t'_1 \dots t'_n)$ und $\Phi \vdash R(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow \Phi \vdash R(t'_1 \dots t'_n)$

4

Beweis: Leicht mit (=)-Regeln des Kalküls

DEF: $\mathcal{I}^\Phi$:

• Träger = $T^S / \sim_\Phi := \{ [t]_{\sim_\Phi} \mid t \text{ S-Term} \}$

• $c^{\mathcal{I}^\Phi} := [c]$

• $f^{\mathcal{I}^\Phi}([t_1] \dots [t_n]) := [f(t_1 \dots t_n)]$

• $R^{\mathcal{I}^\Phi}([t_1] \dots [t_n]) :\Leftrightarrow \Phi \vdash R(t_1 \dots t_n)$

• $\beta(x) := [x]$

5

Lemma: für alle Terme t gilt $\mathcal{I}^\Phi(t) = [t]$

Beweis: Klar.

Lemma: Sei Φ wid. frei. Dann gilt für alle atomare φ

$$\mathcal{I}^\Phi \models \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi$$

Beweis: Klar.

6

PROBLEM 2: In jedem Modell $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \models \varphi$ oder $\mathcal{M} \models \neg \varphi$

Für Ableitungen gilt dies nicht:

ZB: Φ_{GR} und $\varphi: \forall x \forall y (xy = yx)$

Es kann sein, daß $\Phi \not\models \varphi$ und $\Phi \not\models \neg \varphi$

DEF: Φ ist negationstreu wenn für alle φ gilt $\Phi \models \varphi$
oder $\Phi \models \neg \varphi$.

7

Bem. Üblicherweise heißt das "vollständig"
(Eng: complete)

Lemma. Wenn Φ wid. frei und neg. treu,
dann gilt

$$\neg \Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi \quad \text{für alle propositionelle } \varphi \\ \text{(dh ohne } \exists, \forall \text{)}$$

Beweis: Atomare schon gesehen.

8

$$\neg \Phi \vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg \Phi \vdash \varphi \text{ oder } \neg \Phi \vdash \psi \stackrel{IH}{\Leftrightarrow} \\ \Phi \vdash \varphi \text{ oder } \Phi \vdash \psi \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \Phi \vdash \varphi \vee \psi$$

Weil: $\Rightarrow$ folgt sofort aus der $\vee$ -Regel

$\Leftarrow$ Wenn $\Phi \nvdash \varphi$ und auch $\Phi \nvdash \psi$ dann gilt wegen

Negat. Treue von Φ , daß $\Phi \vdash \neg \varphi$ und $\Phi \vdash \neg \psi$

$$\text{Dann } \Phi \vdash \neg \varphi \wedge \neg \psi \Rightarrow \Phi \vdash \neg (\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Phi \vdash \perp$$

9

$$\neg \Phi \vdash \neg \varphi \Leftrightarrow \neg \Phi \not\vdash \varphi \stackrel{IH}{\Leftrightarrow} \Phi \not\vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash \neg \varphi$$

Wegen
Neg. Treue von Φ

□

PROBLEM 3: $\neg \Phi \vdash \exists x \varphi \Leftrightarrow$ Es gibt $[t]$ so daß

wir wollen: $\neg \Phi \stackrel{[t]}{x} \vdash \varphi \stackrel{\text{SUBST}}{\Leftrightarrow} \neg \Phi \vdash \varphi \frac{t}{x}$ für ein Term t

$$\stackrel{IH}{\Leftrightarrow} \Phi \vdash \varphi \frac{t}{x} \stackrel{??}{\Leftrightarrow} \Phi \vdash \exists x \varphi$$

10

Die $\Leftarrow$ Richtung ist im Allg. nicht korrekt:

Aus $\Phi \vdash \exists x \varphi$ folgt nicht $\Phi \vdash \varphi \frac{t}{x}$ für ein konkretes t

ZB: $S = \{R\}$ und $\Phi = \{ \exists x R(x) \} \cup \{ \neg R(x) \mid x \text{ Variable} \}$

Dann $\Phi \vdash \exists x R(x)$

Aber $\Phi \not\vdash R(\frac{t}{x})$

DEF: Φ enthält Beispiele wenn für alle

11

exist. Aussagen " $\exists x \varphi(x)$ " (wobei φ Formel)
gibt es ein Term t , so daß

$$\Phi \vdash \exists x \varphi \rightarrow \varphi_{\frac{t}{x}}$$

Satz von Henkin: Wenn Φ wid. frei, neg. frei ist und
Beispiele enthält, dann gilt

$$\neg \Phi \vdash \varphi \iff \Phi \vdash \varphi \text{ für alle } \varphi$$

12

Beweis: wie eben angegeben. Der Schritt

$$\Phi \vdash \exists x \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi_{\frac{t}{x}}$$

der uns gefehlt hat, gilt jetzt, weil

$$\Phi \vdash \exists x \varphi \rightarrow \varphi_{\frac{t}{x}} \quad (\text{und Modus Ponens}) \quad \boxtimes$$

was macht man mit allgemeinem Φ wid. frei?

13

Prop 1: Wenn Φ wid. frei, dann gibt es $\Phi \preceq \Phi^*$
so daß Φ^* wid. frei und negationstreu.

Prop 2: Φ wid. frei, (in Sprache S), dann gibt es
 $\tilde{\Phi}$ (in Sprache $\tilde{S} \supseteq S$) so daß $\tilde{\Phi} \preceq \Phi$
und $\text{Con}(\tilde{\Phi})$ und $\tilde{\Phi}$ enthält Beispiele

14

Beweis von Prop 1: Sei $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ eine Aufzählung von L .

$$\Phi_0 := \Phi$$

$$\Phi_{\alpha+1} := \begin{cases} \Phi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & \text{wenn } \Phi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ wid. frei} \\ \Phi_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \Phi_\alpha$$

$$\Phi^* = \bigcup_{\alpha < \kappa} \Phi_\alpha$$

15

Dann: Sei φ beliebig, $\varphi = \varphi_\alpha$. Wenn $\hat{\Phi} \Vdash \neg \varphi_\alpha$
dann ist $\text{Con}(\hat{\Phi}^* \cup \{\varphi_\alpha\})$, also $\text{Con}(\Phi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\})$
also $\varphi_\alpha \in \Phi_{\alpha+1} \subseteq \Phi^*$, also $\Phi^* \vdash \varphi_\alpha \quad \square$

16

Bew. von Prop 2:

Zuerst: Sei Φ eine Menge S -Formeln

Sei $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ eine Aufzählung von L^S .

Sei $\tilde{S} := S \cup \{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ (neue Konst. Symb)

$$\tilde{\Phi} = \Phi \cup \left\{ \exists x \varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\frac{c_\alpha}{x}} \mid \alpha < \kappa \right\}$$

17

Lemma: $\text{Con}(\Phi) \Rightarrow \text{Con}(\tilde{\Phi})$

Beweis Ang. $\tilde{\Phi} \vdash \perp$. Dann gibt es endliche $\tilde{\Phi}_0 \subseteq \tilde{\Phi}$, $\tilde{\Phi}_0 \vdash \perp$

In $\tilde{\Phi}_0$ kommen nur endlich viele Aussagen der Form
" $\exists x \varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\frac{c_\alpha}{x}}$ " vor

Wir nehmen an, nur ein einziges $\exists x \varphi_1 \rightarrow \varphi_{\frac{c_1}{x}}$.

18

Es gibt $\Gamma \subseteq \tilde{\Phi}$, so daß

$$\boxed{\Gamma \quad \exists x \varphi_1 \rightarrow \varphi_{\frac{c_1}{x}} \quad \perp}$$

eine ableitbare Sequenz ist.

Wollen zeigen $\boxed{\Gamma \perp}$

auch eine ableitbare Sequenz ist

Sei v eine Variable die in Γ
nicht vorkommt.

$$\text{Beh: } \boxed{\Gamma \quad \exists x \varphi_1 \rightarrow \varphi_{\frac{v}{x}} \quad \perp}$$

ist auch ableitbar.

Bew: weder c_1 noch v kommen
vor in Γ . $\square$

Jetzt:

20

1. Γ	$\neg \exists x \varphi_1 \vee \varphi_1^{\forall x}$	$\perp$	
2. Γ	$\neg \exists x \varphi_1$	$\neg \exists x \varphi_1 \vee \varphi_1^{\forall x}$	(VS)
3. Γ	$\varphi_1^{\forall x}$	$\neg \exists x \varphi_1 \vee \varphi_1^{\forall x}$	(VS)
4. Γ	$\neg \exists x \varphi_1$	$\perp$	(Kettenschluß 1,2)
5. Γ	$\varphi_1^{\forall x}$	$\perp$	(Kettenschluß 1,3)
6. Γ	$\exists x \varphi_1$	$\perp$	($\exists A$ -mit $\forall$ nicht frei in φ_1)
7. Γ		$\perp$ (F.U. 4,6)	[Daher mussten wir C_1 durch $\forall$ ersetzen]

Damit ist die Lemma bewiesen. $\square$

Jetzt: Wenn $\exists x \varphi$ eine Aussage in S , dann gibt es $\tilde{\Phi}$ so dass $\tilde{\Phi} \vdash \exists x \varphi \rightarrow \varphi_x^{\pm}$
Aber es gibt jetzt neue " $\exists x \varphi$ "-Aussagen in $\tilde{S}$.

Also: $\Phi_0 = \Phi$ $S_0 = S$ $\Rightarrow$ Und $\tilde{\Phi}_\omega = \bigcup_n \tilde{\Phi}_n$
 $\vdots$ $\Phi_{n+1} = \tilde{\Phi}_n$ $S_{n+1} = \tilde{S}$ und $\tilde{S}_\omega = \bigcup_n S_n$