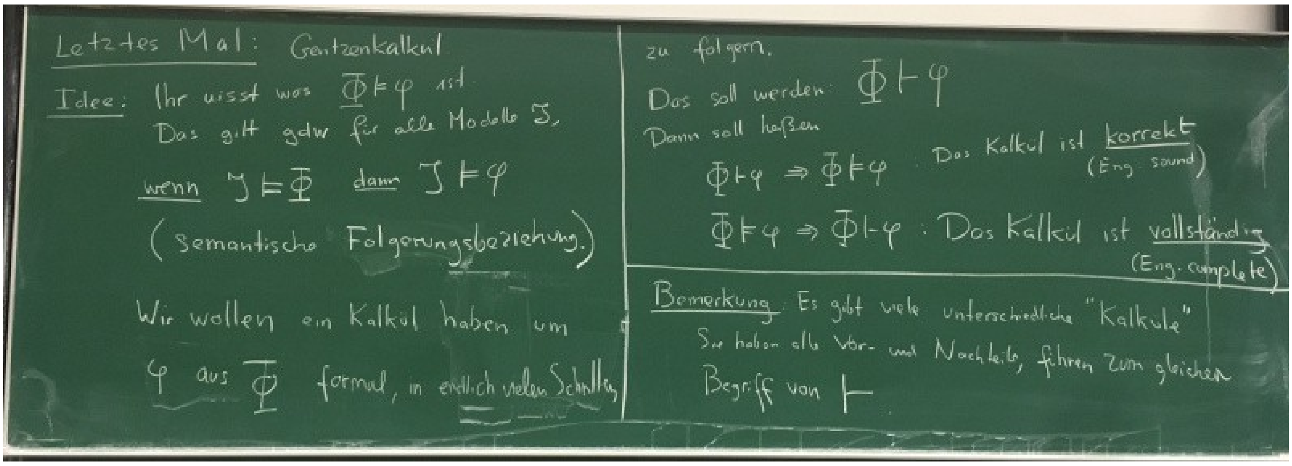
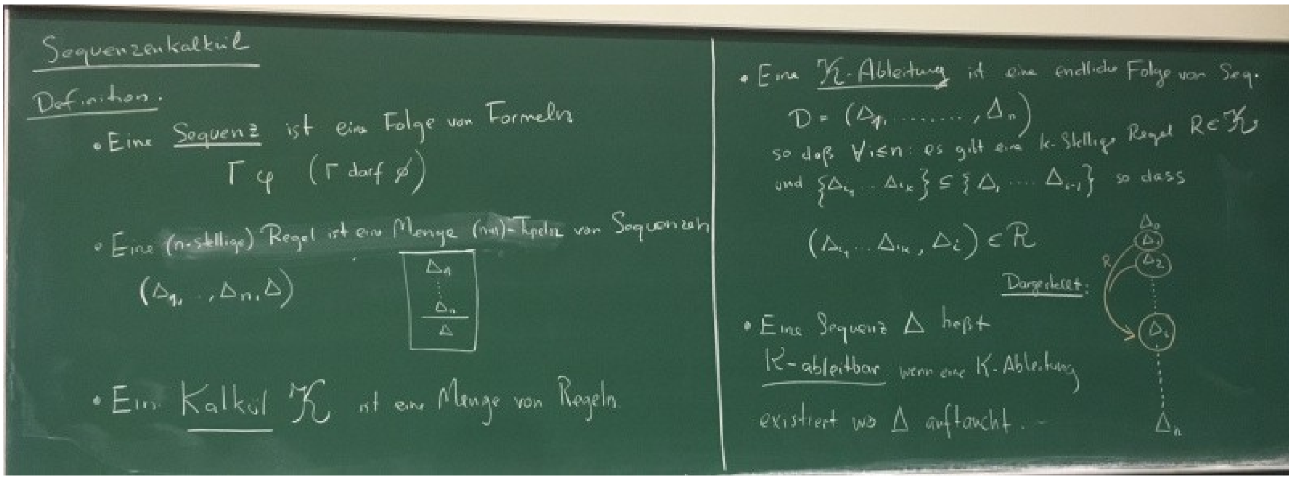
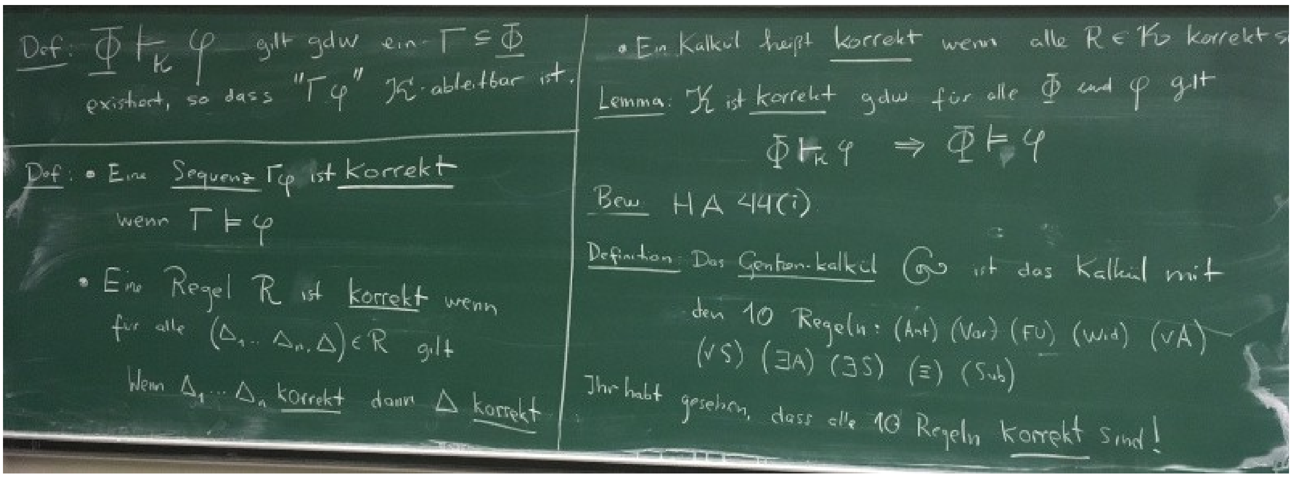
Vorlesung
Dr. Khomskii
3. Juli 2018







Korollar: G ist **korrekt**

Beispiel (Wid') $\dfrac{\Gamma\ \varphi \qquad \Gamma\ \neg\psi}{\Gamma\ \varphi}$

Ableitung:
1. $\Gamma\ \psi$
2. $\Gamma\ \neg\psi$
3. $\Gamma\ \neg\varphi\ \psi$ (Ant 1)
4. $\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi$ (Ant 2)
5. $\Gamma\ \varphi$ (Wid)

(Kettenschluß) $\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi \qquad \Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \psi}$

Ableitung:
1. $\Gamma\ \varphi\ \psi$
2. $\Gamma\ \varphi$
3. $\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\varphi$ (Vor)
4. $\Gamma\ \neg\varphi\ \varphi$ (Ant 2)
5. $\Gamma\ \neg\varphi\ \psi$ (Wid' 3,4)
6. $\Gamma\ \psi$ (FU 1,5)

Auf ähnliche Weise kann man zB zeigen

- "Excluded Middle" $\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$
- "Doppelte Verneinung" $\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \neg\neg\varphi}$ $\qquad \dfrac{\Gamma\ \neg\neg\varphi}{\Gamma\ \varphi}$
- Kontraposition $\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi}$ und die anderen 3
- Modus Ponens $\dfrac{\Gamma\ \varphi\to\psi \qquad \Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \psi}$

Δ_n / Δ

- Ein **Kalkul** $\mathcal{K}$ ist eine Menge von Regeln

- Eine Sequenz Δ heißt **$\mathcal{K}$-ableitbar** wenn eine $\mathcal{K}$-Ableitung existiert wo Δ auftaucht. –

Dargestellt: $\Delta_2 \xrightarrow{R} \Delta_i \ \vdots \ \Delta_n$

- "$\to$-Einführung" $\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \varphi\to\psi}$
- De Morgan ....
  .... Regel für $\wedge$, $\forall$, für $\equiv$ usw.

Formal | **Def**: Eine **Regel** R^* ist **$\mathcal{K}$-ableitbar** falls für alle $(\Delta_1 \dots \Delta_n, \Delta) \in R^*$ gibt es eine Folge $D = (\tilde\Delta_1 \dots \tilde\Delta_k, \tilde\Delta_{k+1} = \Delta)$ so dass für alle $i \le k+1$

- entweder $(\tilde\Delta_{i_1} \dots \tilde\Delta_{i_\ell}, \Delta_i) \in R$ für eine $R \in \mathcal{K}$ und $\{\tilde\Delta_{i_1} \dots \tilde\Delta_{i_\ell}\} \subseteq \{\tilde\Delta_1, \dots \tilde\Delta_{i-1}\}$,
- oder $\tilde\Delta_i \in \{\Delta_1 \dots \Delta_n\}$.

Schematisch: $(\Delta_1 \Delta_2, \Delta) \in R^*$

$$\dfrac{\begin{matrix}\tilde\Delta_1 \\ \tilde\Delta_2 = \Delta_1 \\ \tilde\Delta_3 \\ \tilde\Delta_4 = \Delta_2 \\ \vdots \\ \tilde\Delta_k\end{matrix}}{\tilde\Delta_{k+1} = \Delta}\ R^*$$

Lemma: Wenn R^* $\mathcal{K}$-ableitbar, dann:
(a) $\mathcal{K}$ korrekt $\Rightarrow$ $\mathcal{K} \cup \{R^*\}$ korrekt
(b) $\Phi \vdash_{\mathcal{K} \cup \{R^*\}} \varphi$
$\Rightarrow \Phi \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

Beweis: Einfache Aufgabe.

Bemerkung: Statt $\vdash_G$ schreiben wir $\vdash$
"Ableitbar" statt "G-ableitbar"

Widerspruchsfreiheit

Def: Sei $\bot$ eine Abkürzung für $\varphi \wedge \neg\varphi$ (irgendein φ)

Def: Φ ist **widersprüchlich** wenn $\Phi \vdash \bot$.

Lemma: Φ ist **widerspr.** gdw $\Phi \vdash \psi$ für beliebige ψ

Bew: Einfach mittels (Wid')

Def: Φ ist **widerspruchsfrei** (Eng. consistent) wenn $\Phi \nvdash \bot$

Lemma: (a) $\Phi \vdash \varphi$ gdw $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$
(b) $\Phi \vdash \neg\varphi$ gdw $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \bot$
(c) Wenn $\mathrm{Con}(\Phi)$ dann $\mathrm{Con}(\Phi \cup \{\varphi\})$ oder $\mathrm{Con}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$

Beweis: (a) Wenn $\Phi \vdash \varphi$ dann $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$
$\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$

Umg. $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$, dann gibt es $\Gamma \subseteq \Phi$ so, dass

$$(\text{Wid})\ \dfrac{\Gamma\ \neg\varphi\ \psi \qquad \Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi}{\Gamma\ \varphi}$$

Def: φ ist tautologisch wenn $\emptyset \vdash \varphi$ (schreib $\vdash \varphi$)

Korollar: φ tautologisch gdw $\{\neg\varphi\} \vdash \bot$

Andere Eigenschaften (ohne Beweis)

- $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \to \psi$
- Wenn $\Gamma = \{\gamma_1 \dots \gamma_n\}$ dann

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash (\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \to \varphi$$

Korrektheit von $\vdash$ heißt: $\Phi \vdash \varphi$ dann $\Phi \models \varphi$

Korollar: Wenn Φ erfüllbar dann $Con(\Phi)$

Beweis: Sonst $\Phi \vdash \bot$, nach Korrektheit also $\Phi \models \bot$

also, es gibt kein $\mathfrak{I} \models \Phi$

Definition: $\vdash_{\mathcal{K}}$ heißt Vollständig wenn für alle Φ, φ gilt

wenn $\Phi \models \varphi$ dann $\Phi \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

Theorem (Gödel 1929): $\vdash_G$ ist vollständig.

$(\tilde\Delta_1 \dots \tilde\Delta_k, \tilde\Delta_{k+1} = \Delta)$ so dass für alle $i \leq k+1$

- entweder $(\tilde\Delta_{i_1} \dots \tilde\Delta_{i_\ell}, \Delta_i) \in R$ für ein $R \in \mathcal{K}$ und $\{\tilde\Delta_{i_1} \dots \tilde\Delta_{i_\ell}\} \subseteq \{\tilde\Delta_1 \dots \tilde\Delta_{i-1}\}$,

$\tilde\Delta_{k+1} = \Delta^k$

Bemerkung: Statt $\vdash_G$ schreiben wir $\vdash$

"Ableitbar" statt "G-ableitbar".

Lemma: die folgenden sind äquivalent

(1) $\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$ für alle Φ, φ

(2) Wenn $Con(\Phi)$ dann ist Φ erfüllbar

Bew: (1) $\Rightarrow$ (2) Wenn Φ nicht erfüllbar, dann $\Phi \models \bot$

also $\Phi \vdash \bot$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\Phi \models \varphi$ dann $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar, also

$\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. Also nach Lemma (*), $\Phi \vdash \varphi$.

Um Vollständigkeit zu beweisen, reicht es, ein Modell $\mathfrak{I}$ anzugeben, so dass $\mathfrak{I} \models \Phi$, für ein widerspruchsfreies Φ

Beweis kommt morgen

Endlichkeitssatz ("Compactness")

(1) Wenn $\Phi \models \varphi$ dann gibt es endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ so dass $\Phi_0 \models \varphi$

(2) Wenn alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar sind, dann ist Φ erfüllbar