

Letztes Mal: Gentzenkalkül

Idee: Ihr wisst was $\Phi \vDash \varphi$ ist
 Das gilt gdw für alle Modelle \mathcal{M} ,
 wenn $\mathcal{M} \vDash \Phi$ dann $\mathcal{M} \vDash \varphi$
 (semantische Folgerungsbeziehung)

Wir wollen ein Kalkül haben um
 φ aus Φ formal, in endlich vielen Schritten,
 zu folgern.

Das soll werden: $\Phi \vdash \varphi$
 Dann soll heißen
 $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \vDash \varphi$ Das Kalkül ist korrekt (Eng. sound)
 $\Phi \vDash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$ Das Kalkül ist vollständig (Eng. complete)

Bemerkung: Es gibt viele unterschiedliche "Kalküle"
 Sie haben alle Vor- und Nachteile, führen zum gleichen
 Begriff von \vdash

Sequenzkalkül

Definition:

- Eine Sequenz ist eine Folge von Formeln $\Gamma \varphi$ (Γ darf \emptyset)
- Eine (n -stellige) Regel ist eine Menge ($n+1$)-Tupel von Sequenzzahl $(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta)$

$$\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \\ \hline \Delta \end{array}$$

• Eine Kalkül \mathcal{K} ist eine Menge von Regeln

• Eine \mathcal{K} -Ableitung ist eine endliche Folge von Seq.
 $\mathcal{D} = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$
 so daß $\forall i \in n$: es gilt eine k -stellige Regel $R \in \mathcal{K}$
 und $\{\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_k}\} \subseteq \{\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}\}$ so dass
 $(\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_k}, \Delta_i) \in R$

Dargestellt:

• Eine Sequenz Δ heißt \mathcal{K} -ableitbar wenn eine \mathcal{K} -Ableitung existiert wo Δ auftaucht.

D.f.: $\Phi \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$ gilt gdw ein $\Gamma \subseteq \Phi$ existiert, so dass " $\Gamma \varphi$ " \mathcal{K} -ableitbar ist.

D.f.: • Eine Sequenz $\Gamma \varphi$ ist korrekt wenn $\Gamma \vDash \varphi$

- Eine Regel R ist korrekt wenn für alle $(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta) \in R$ gilt
 Wenn $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ korrekt dann Δ korrekt

• Ein Kalkül heißt korrekt wenn alle $R \in \mathcal{K}$ korrekt sind

Lemma: \mathcal{K} ist korrekt gdw für alle Φ und φ gilt
 $\Phi \vDash_{\mathcal{K}} \varphi \Rightarrow \Phi \vDash \varphi$

Bew. HA 44(i)

Definition: Das Gentzenkalkül \mathcal{G} ist das Kalkül mit den 10 Regeln: (Ant) (Var) (Fu) (wid) (vA) (vS) (\exists A) (\exists S) (\exists) (Sub)

Ihr habt gesehen, dass alle 10 Regeln korrekt sind!

Korollar. G_0 ist korrekt

Beispiel (wid) $\frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \neg \psi}{\Gamma \varphi}$

Ableitung:

1. $\Gamma \varphi$
2. $\Gamma \neg \psi$
3. $\Gamma \neg \varphi \quad \psi$ (Ant 1)
4. $\Gamma \neg \varphi \quad \neg \psi$ (Ant 2)
5. $\Gamma \varphi$

(Kettenschluss) $\frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \neg \psi}{\Gamma \varphi}$

Ableitung:

1. $\Gamma \varphi \quad \psi$
2. $\Gamma \varphi \quad \neg \psi$
3. $\Gamma \neg \varphi \quad \neg \psi$ (wid)
4. $\Gamma \neg \varphi \quad \varphi$ (Ant 2)
5. $\Gamma \neg \varphi \quad \psi$ (wid 3,4)
6. $\Gamma \varphi \quad \psi$ (FU 1,5)

Auf ähnliche Weise kann man ZB zeigen

- "Excluded Middle" $\frac{\varphi \vee \neg \varphi}{\varphi \vee \neg \varphi}$
- "Doppelte Verneinung" $\frac{\Gamma \varphi}{\Gamma \neg \neg \varphi} \quad \frac{\Gamma \neg \neg \varphi}{\Gamma \varphi}$
- Kontraposition $\frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \psi \rightarrow \varphi}{\Gamma \neg \psi \rightarrow \neg \varphi}$ und die anderen 3
- Modus Ponens $\frac{\Gamma \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \varphi}{\Gamma \psi}$

• Eine Kalkül \mathcal{K} ist eine Menge von Regeln

• Eine Sequenz Δ heißt \mathcal{K} -ableitbar wenn eine \mathcal{K} -Ableitung existiert wo Δ auftaucht.

Dargestellt:

• "→-Einführung" $\frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \psi}{\Gamma \varphi \rightarrow \psi}$

• De Morgan ...
... Regel für $\wedge, \vee, \text{für } \equiv$ usw.

Formal Def. Eine Regel R^* ist \mathcal{K} -ableitbar falls für alle $(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta) \in R^*$ gibt es eine Folge $D = (\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_k, \tilde{\Delta}_{k+1}, \dots, \tilde{\Delta}_n, \Delta)$ so dass für alle $i \leq k+1$ - entweder $(\tilde{\Delta}_i, \dots, \tilde{\Delta}_i, \tilde{\Delta}_i) \in R$ für eine Regel R und $\{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_i\} \subseteq \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{i-1}\}$,

- oder $\tilde{\Delta}_i \in \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$.

Schematisch: $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta) \in R^*$

Lemma. Wenn $R^* = \mathcal{K}$ ableitbar, dann:

- (a) \mathcal{K} korrekt $\Rightarrow \mathcal{K} \cup R^*$ korrekt
- (b) $\Phi \vdash_{\mathcal{K} \cup R^*} \varphi \Rightarrow \Phi \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$

Beweis. Einfache Aufgabe.

Bemerkung. Statt $\vdash_{\mathcal{K}}$ schreiben wir \vdash "Ableitbar" statt "K-ableitbar"

Widerspruchsfreiheit

Def. Sei \perp eine Ableitung für $\varphi \wedge \neg \varphi$ (irgendwas φ)

Def. Φ ist widersprüchlich wenn $\Phi \vdash \perp$.

Lemma. Φ ist widerspr. gdw $\Phi \vdash \psi$ für beliebige ψ

Bew. Einfach mittels (wid')

Def. Φ ist widerspruchsfrei (EM consistent) wenn $\Phi \not\vdash \perp$

Lemma:

- (a) $\Phi \vdash \varphi$ gdw $\Phi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$
- (b) $\Phi \vdash \neg \varphi$ gdw $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \perp$
- (c) Wenn $\text{Con}(\Phi)$ dann $\text{Con}(\Phi \cup \{\varphi\})$ oder $\text{Con}(\Phi \cup \{\neg \varphi\})$

Beweis. (a) Wenn $\Phi \vdash \varphi$ dann $\Phi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \varphi$ und $\Phi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \neg \varphi$
 $\Rightarrow \Phi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$

Umq. $\Phi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$, dann gibt es $\Gamma \subseteq \Phi$ so, dass $\frac{\Gamma \neg \varphi \quad \Gamma \varphi \rightarrow \perp}{\Gamma \perp}$
 (wid) $\frac{\Gamma \neg \varphi \quad \Gamma \varphi \rightarrow \perp}{\Gamma \perp}$

Def. φ ist tautologisch wenn $\emptyset \vdash \varphi$ (schreib $\vdash \varphi$)

Korollar. φ tautologisch gdw $\exists \neg \varphi \vdash \perp$

Andere Eigenschaften (Ohne Beweis)

• $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

• Wenn $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ dann

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \vdash (\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \rightarrow \varphi$$

Korrektheit von \vdash heißt: $\Phi \vdash \varphi$ dann $\Phi \models \varphi$

Korollar: Wenn Φ erfüllbar dann $\text{Con}(\Phi)$

Beweis: Sonst $\Phi \vdash \perp$, nach Korrektheit also $\Phi \models \perp$
also, es gibt kein $\mathcal{I} \models \Phi$

Definition: $\vdash_{\mathcal{L}}$ heißt Vollständig wenn für alle Φ, φ gilt

wenn $\Phi \models \varphi$ dann $\Phi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

Theorem (Gödel 1929): $\vdash_{\mathcal{L}}$ ist vollständig.

$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \text{Con}(\Phi \cup \{\neg \varphi\}) = \emptyset$
- entweder $(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathcal{R}$ für eine Regel und $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \subseteq \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$

$$\Delta_{k+1} = \Delta^k$$

Bemerkung: Statt $\vdash_{\mathcal{L}}$ schreiben wir \vdash
"Ableitbar" statt "G-ableitbar"

Lemma: die folgenden sind äquivalent

(1) $\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi$ für alle Φ, φ

(2) Wenn $\text{Con}(\Phi)$ dann ist Φ erfüllbar

Bew: (1) \Rightarrow (2) Wenn Φ nicht erfüllbar, dann $\Phi \models \perp$
also $\Phi \vdash \perp$.

(2) \Rightarrow (1) $\Phi \models \varphi$ dann $\Phi \cup \{\neg \varphi\}$ nicht erfüllbar, also
 $\Phi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$. Also nach Lemma (*), $\Phi \vdash \varphi$.

Um Vollständigkeit zu beweisen, reicht es, ein Modell \mathcal{I} anzugeben, so dass $\mathcal{I} \models \Phi$, für ein widerspruchsfreies Φ

Beweis kommt morgen

Endlichkeitsatz ("Compactness")

(1) Wenn $\Phi \models \varphi$ dann gibt es endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ so dass $\Phi_0 \models \varphi$

(2) Wenn alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar sind,
dann ist Φ erfüllbar