

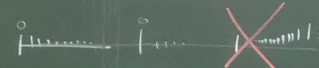
# Mathematische Logik & Mengenlehre

Sommersemester 2019

Siebzehnte Vorlesung: 5. Mai 2019, vertreten durch Herrn Dr. Khomskii

Letztes Mal:

Hauptsatz:  $W_1$  und  $W_2$  W.O.  
Dann gilt  
(1)  $W_1 \cong W_2$   
oder  
(2)  $W_1 \cong I_X$  für  $X \in W_2$   
oder  
(3)  $W_2 \cong I_Y$  für  $Y \in W_1$



Keine absteigenden unendlichen Ketten.

Folgt: Bis auf Isomorphie sind WO'gen total geordnet (Wohl-geordnet)

Man könnte  $([W]_{\cong}, \leq)$  def durch  $[W] \leq [W']$  gdw (2) gilt.  
↳ das wäre ein Klassen-WO von echten Klassen.

Stattdessen: wähle, auf eine kanonische Weise, Repräsent. aus jeder  $[W]_{\cong}$ .

In der Mengenlehre haben wir bereits die  $\in$ -Rel.

Achtung: An sich ist  $\in$  gar nicht trans, total.

DEF: Eine Ordinalzahl ist eine Menge  $\alpha$ , so dass  
(1)  $\alpha$  transitiv  
(2)  $(\alpha, \in)$  ist eine WO. [wenn Fund gilt, reicht  $(\alpha, \in)$  ist total und trans]

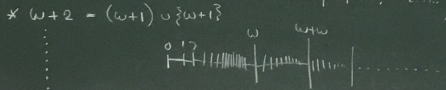
Gibt es überhaupt solche  $\omega \in \mathbb{Z}$ ?

Ihr kennt schon:  $\mathbb{N} = \emptyset$   
 $n+1 = \{0, 1, \dots, n\}$

Für  $\mathbb{N}$ :  $n < m \Leftrightarrow n \in m \Leftrightarrow n \neq m$   
 $n \leq m \Leftrightarrow n \in m$

$\Rightarrow (\mathbb{N}, \in)$  und jede  $(n, \in)$  sind OZ.

\*  $n+1 = n \cup \{n\}$       $\omega+n = \{0, 1, 2, \dots, \omega+n-1, \omega+n\}$   
 \*  $\mathbb{N} = \omega$       $\omega+\omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots\}$   
 \*  $\omega+1 = \omega \cup \{\omega\}$   
 \*  $\omega+2 = (\omega+1) \cup \{\omega+1\}$



Lemma 1:  $\alpha, \beta \in \text{OZ}$

(a)  $\alpha \notin \alpha$   
 (b)  $\alpha \in \text{OZ}$  und  $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \text{OZ}$   
 (c)  $\alpha, \beta \in \text{OZ} \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \text{OZ}$   
 (d)  $\alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \wedge \alpha \neq \beta$   
 (e)  $\alpha \leq \beta$  oder  $\beta \leq \alpha$ .

Bew. (a) [Wenn FUND dann sowieso]  
 Sonst:  $\alpha \in \alpha \Rightarrow$  "α ∈ α" widerspricht "(α, ∈) ist WO"

(b) Trans:  $\delta \in \gamma \in \beta \rightarrow$  Da  $\{\delta, \gamma, \beta\} \subseteq \alpha$ , und  $(\alpha, \in)$  WO  
 $\rightarrow \delta \in \beta$   
WO es reicht zz dass  $\beta \leq \alpha$ .

(b) Aber sei  $\gamma \in \beta$   
 Dann  $\gamma \in \beta \cap \alpha$   
 $\rightarrow \gamma \in \alpha$   
 Darum  $\beta \subseteq \alpha$  (\*)

(c) Einfach

(d)  $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$  wegen (a) und  $\alpha \in \beta$  wegen (\*)

Sei nun  $\alpha \in \beta, \alpha \neq \beta$   
 Sei  $\gamma$  kleinste in  $\beta \setminus \alpha$   
 Dann  $I_\gamma = \{\delta : \delta \in \gamma\} = \{\delta : \delta \in \alpha\}$

$\Rightarrow \gamma = \alpha \in \beta$

(e) Sei  $\gamma = \alpha \cap \beta, \gamma \in O_\mathbb{Z}$  wegen (c)

$\gamma = \alpha$   
 und  $\gamma \in \beta$

Wenn  $\gamma \neq \alpha \xrightarrow{(d)} \gamma \in \alpha$   
 und  $\gamma \neq \beta \xrightarrow{(d)} \gamma \in \beta$  }  $\gamma \in (\alpha \cap \beta) = \gamma \Rightarrow \gamma \in \gamma$  (a)  $\square$

DEF:  $\alpha, \beta \in O_\mathbb{Z}$   $\alpha < \beta$  : gdw  $\alpha \in \beta$

Dann  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$   
 $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$

AUCH:  $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$   $\rightarrow$  genauso hier  $\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, \delta\}$

Lemma 2:  $(O_\mathbb{Z}, <)$  ist eine (Klassen-) W.O.

Beweis: Einfach

Lemma 3:  $\forall \alpha \in O_\mathbb{Z}$ :  
 $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$   
 ist die kleinste OZ  $> \alpha$ .

Bew: Sei  $\beta > \alpha$ , dann  $\alpha \in \beta$  und  $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \beta$   
 $\Rightarrow \alpha + 1 \in \beta$   $\square$

$\alpha + 1$  heißt die Nachfolger  $O_\mathbb{Z}$  von  $\alpha$

Lemma 4: Sei  $C \subseteq O_\mathbb{Z}$  Dann ist  $\cup C$  auch OZ, und  
 $\cup C = \sup(C)$   
 $\cap C$  auch OZ und  $\cap C \in C$  und  $\cap C = \inf(C)$ .

Def: eine Klasse ist eine Formel  $\phi$ , z.B.

$X := \{x : \phi(x)\}$   
 Klasse  $\uparrow$   $\uparrow$  Formel

Klassen können Mengen sein

Es gibt auch echte Klassen, z.B.  $V = \{x \mid 1 = 1\}$   
 $V \setminus \{2019\} = \{x \mid x \neq 2019\}$

Man kann schreiben:  $x \in X$

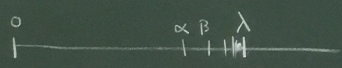
$X \subseteq Y$   $\forall x (\phi(x) \rightarrow \psi(x))$

Man kann NICHT:  $X \in \dots$

Welche Arten von OZ?

- $0 := \emptyset$
- $\forall \alpha \in O_\mathbb{Z}, \alpha + 1 \in O_\mathbb{Z}$   
 $\hookrightarrow$  Nachfolger OZ.
- Limesordinalzahl:  $\lambda$  so dass  $\lambda \neq \alpha + 1 \forall \alpha \in O_\mathbb{Z}$ .

Bem: Wenn  $\lambda$  Limes OZ  $\forall \alpha < \lambda \exists \beta : \alpha < \beta < \lambda$



(\*\*)

Bem: Wenn  $(\alpha, \epsilon) \cong (\beta, \epsilon) \Rightarrow \alpha = \beta$

Bew: sonst wäre z.B.  $\alpha \in \text{echt}$ . Auf segm von  $\alpha$  selbst.  $\square$

Hauptsatz zu OZ:

Jede WO  $(W, \leq)$  ist isomorph zu einer endl OZ  $\alpha$ .

Beweis: 1. Eindeutigkeit folgt aus Bem (\*\*)

2. Existenz:  $\forall x \in W$ , sei  $x$  gut wenn

$\exists F_x : (I_x, \leq) \cong \alpha_x$   
 sonst ist  $x$  schlecht.

Bem: Jede nach unten abg  $x \in O_\mathbb{Z}$  ist eine OZ

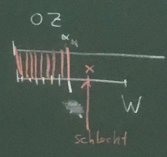
Klar:  $x$  gut  $\Rightarrow \forall y < x : y$  gut.

Beh: alle  $x \in W$  sind gut

Bew: Wenn nicht, sei  $x \in W$  kleinste schlecht.

Dann  $\forall y < x, \exists \alpha_y \in O_\mathbb{Z}$  s.d.  $I_y \cong \alpha_y$

$\Rightarrow x \leq \{\alpha_y : y < x\} \subseteq$  auf segm von  $O_\mathbb{Z} \Rightarrow \{\alpha_y : y < x\} \in O_\mathbb{Z}$



Also sind alle  $x \in W$  gut.

$$W \cong \cup \{ \alpha_x : x \in W \}$$

das ist aber wieder Abf. Segm.  $\Rightarrow W \cong \gamma \in OZ$   $\square$

DEF: Solche  $\alpha \in W$  nennen wir Ordnungstyp von  $W$   
 $\alpha = ot(W)$

Korollar:  $OZ$  sind keine Menge!

Bew. Sonst wäre  $(OZ, <) \cong (\alpha, \epsilon) \Rightarrow \alpha \in OZ$   
 $\Rightarrow \alpha = OZ$   
 $\Rightarrow \alpha \in \alpha \quad \text{⚡} \quad \square$

Hartogs Theorem: Es gibt überabz.  $OZ$ .

Bew Wenn AC: Sei  $(R, \leq)$  eine WO der  $R$  Zahlen  
 $\Rightarrow (R, \leq) \cong (\alpha, \epsilon)$ , dann  $\alpha \in OZ$  überabz.

Ohne AC: Sei  $WO_{abz} = \{ (W, R) \mid \begin{smallmatrix} \text{Wohlordenungen} \\ W \subseteq \mathbb{N}, R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{smallmatrix} \}$

Sei  $\Gamma = \{ \alpha \in OZ \mid \alpha \text{ abzählbar} \}$

Wenn  $\Gamma$  eine Menge, dann  $\Gamma \in OZ$

Aber dann ist  $\Gamma$  überabz, dann sonst  $\Gamma \in \Gamma \quad \text{⚡}$

Um z.z.  $\Gamma$  Menge, sei

$$F: \begin{matrix} WO_{abz} & \longrightarrow & \Gamma \\ (W, R) & \longmapsto & ot(W, R) \end{matrix}$$

Beh:  $F$  ist surj.

Beweis:

Beh:  $F$  surj.

Bew: Sei  $\alpha$  abz.  $OZ$ .

Dann  $i: \alpha \cong \mathbb{N}$

Def:  $R$  indem  $m R n \Leftrightarrow i^{-1}(m) \in i^{-1}(n)$

Dann:  $(\alpha, \epsilon) \cong (\mathbb{N}, R)$

$\Rightarrow F(\mathbb{N}, R) = \alpha \quad \square$  (Surj.)

Da  $WO_{abz} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ , ist  $WO_{abz}$  eine Menge.

Nach ERS, ist  $\Gamma = F[WO_{abz}]$

auch eine Menge.  $\square$

Dieses  $\Gamma$  ist  $W_1$ .

Induktion und Rekursion auf  $OZ$   
 ist so wie auf beliebigen WO.

Arithmetik:

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} (\alpha + \xi) \quad \text{für Limes } \lambda \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &= \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} (\alpha \cdot \xi) \quad \text{für Limes } \lambda \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \alpha^0 &= 1 \\ \alpha^{(\beta+1)} &= \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda &= \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha^\xi \end{aligned}$$

Das sind rekursive Def.

Bem:  $\alpha + \beta = ot((\alpha, \epsilon) \oplus (\beta, \epsilon))$   
 $\alpha \cdot \beta = ot((\alpha, \epsilon) \otimes (\beta, \epsilon))$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\neq \beta + \alpha & 1 + \omega &\neq \omega + 1 \\ \alpha \cdot \beta &\neq \beta \cdot \alpha \end{aligned}$$