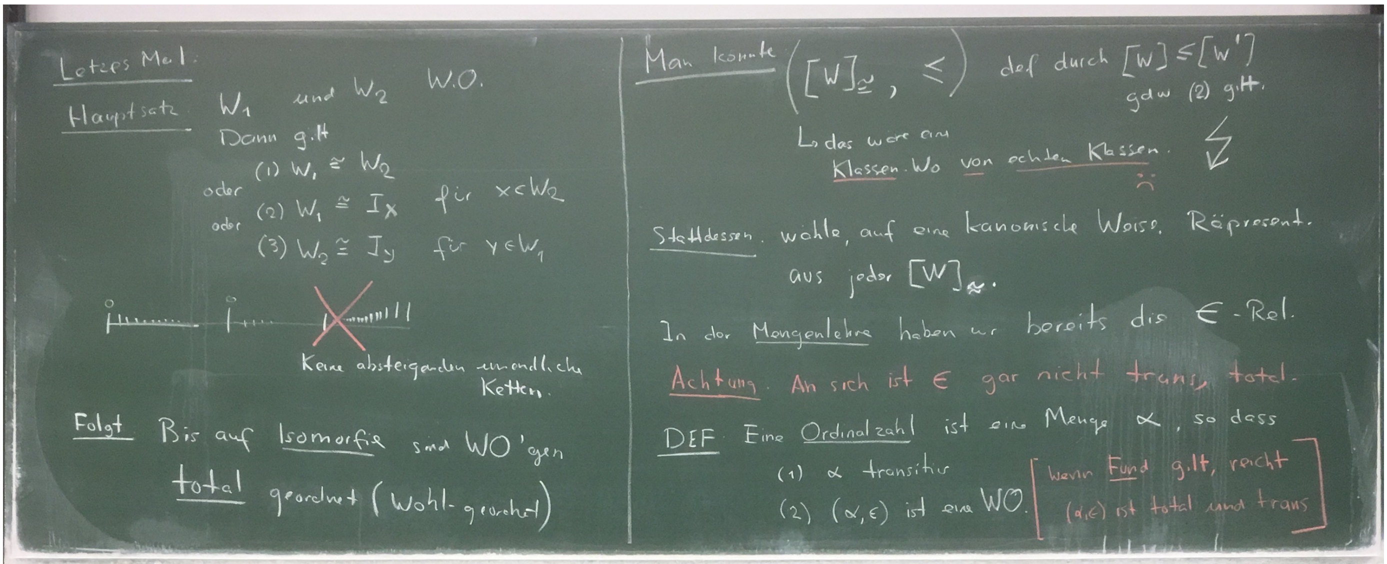
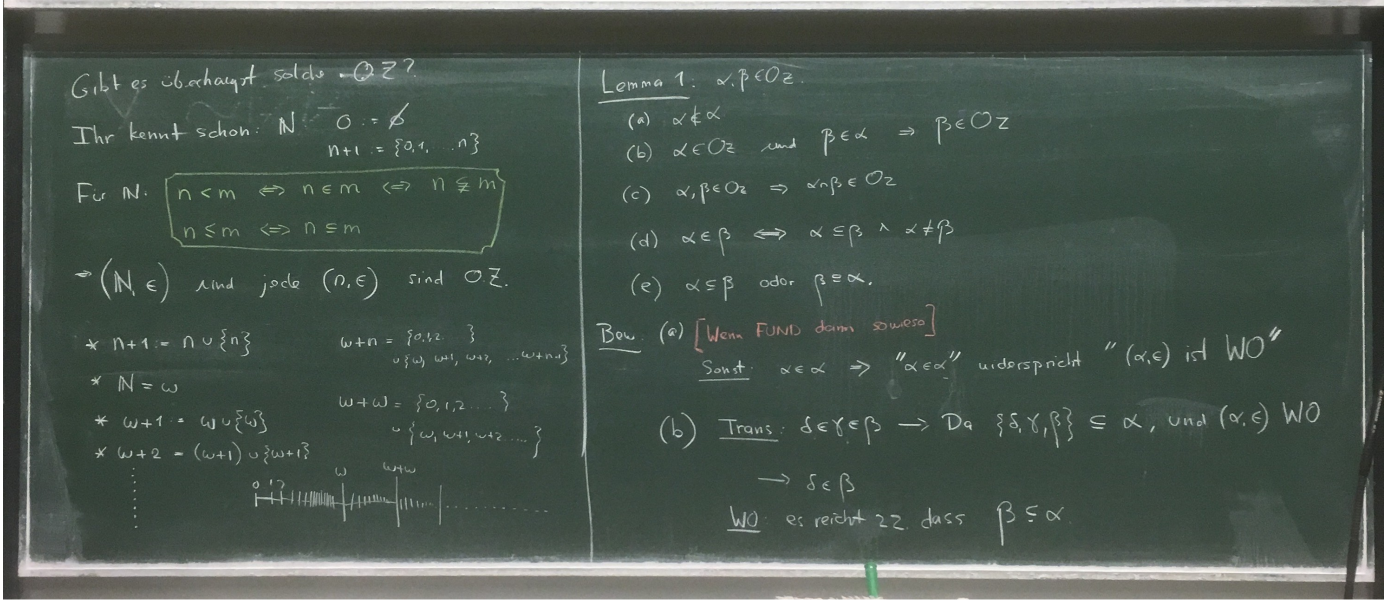
## ***Mathematische Logik & Mengenlehre***

*Sommersemester 2019*

**Siebzehnte Vorlesung**: 5. Mai 2019, *vertreten durch Herrn Dr. Khomskii*



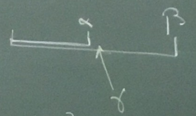



... (b) Aber sei $\gamma \in \beta$.
Dann $\gamma \in \beta \in \alpha$
$\to \gamma \in \alpha$
Darum $\beta \subseteq \alpha$ $(*)$

(c) Einfach

(d) $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$ wegen (a) und $\alpha \subseteq \beta$ wie oben $(*)$

Sei nun $\alpha \subseteq \beta$, $\alpha \neq \beta$




Sei $\gamma$ kleinste in $\beta \setminus \alpha$

Dann $I_\gamma = \{\delta . \delta \in \gamma\} = \{\delta . \delta \in \alpha\}$

$\Rightarrow \gamma = \alpha \in \beta$

(e) Sei $\gamma = \alpha \cap \beta$, $\gamma \in Oz$ wegen (c)

$\gamma \subseteq \alpha$
und $\gamma \subseteq \beta$

Wenn $\left.\begin{array}{l} \gamma \neq \alpha \overset{(d)}{\Longrightarrow} \gamma \in \alpha \\ \text{und } \gamma \neq \beta \overset{(d)}{\Longrightarrow} \gamma \in \beta \end{array}\right\} \gamma \in (\alpha \cap \beta) = \gamma \Rightarrow \gamma \in \gamma$ ↯ (a)

$\square$

DEF $\alpha, \beta \in Oz$ $\boxed{\alpha < \beta \ :\text{gdw}\ \alpha \in \beta}$

Dann: $\boxed{\begin{array}{l} \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \\ \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \end{array}}$

AUCH: $\boxed{\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}}$ → genauso wie $7 = \{0, 1, \ldots, 6\}$

Lemma 2: $(Oz, <)$ ist eine (Klassen-) W.O.

Beweis: Einfach

Lemma 3: $\forall \alpha \in Oz$:
$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$
ist die kleinste OZ $> \alpha$

Bew: Sei $\beta > \alpha$, dann $\alpha \in \beta$ und $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$
$\Rightarrow \alpha + 1 \leq \beta$
$\boxtimes$

$\alpha + 1$ heisst die Nachfolger OZ von $\alpha$

Lemma 4: Sei $C \subseteq Oz$ Dann ist $\bigcup C$ auch OZ, und
$\bigcup C = \sup(C)$.
$\bigcap C$ auch OZ und $\bigcap C \in C$ und $\bigcap C = \inf(C)$.

Def: eine Klasse ist eine Formel $\phi$, z.B

$X := \{x : \phi(x)\}$
Klasse ↑ ↑ Formel

Klassen können Mengen sein

Es gibt auch $\boxed{\text{echte}}$ Klassen, zB $V = \{x \mid 1 = 1\}$

$V \setminus \{2019\} = \{x \mid x \neq 2019\}$

Man kann schreiben: $x \in \boxed{X}$

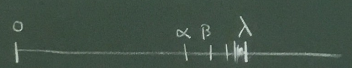
$\boxed{X} \subseteq \boxed{Y}$ $\forall x\, (\phi(x) \to \psi(x))$

Man kann NICHT: $\boxed{X} \in \ldots$

Welche Arten von Oz?

1. $0 := \emptyset$
2. $\forall \alpha \in Oz$, $\underbrace{\alpha + 1}_{} \in Oz$ ↳ Nachfolger o.z.
3. Limesordinalzahl: $\lambda$ so dass $\lambda \neq \alpha + 1$ $\forall \alpha \in Oz$

Bem Wenn $\lambda$ Limesoz $\forall \alpha < \lambda$ $\exists \beta : \alpha < \beta < \lambda$



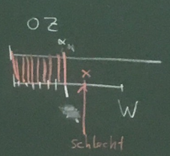

$(**)$
Bem: Wenn $(\alpha, \in) \cong (\beta, \in) \Rightarrow \alpha = \beta$
Bew: sonst wäre zB $\alpha \cong$ echt. Anf segm von sich selbst. $\boxtimes$

Hauptsatz zu OZ:

Jede WO $(W, \leq)$ ist isomorph zu einer eind OZ $\alpha$.

Beweis: 1. Eindeutigkeit folgt aus Bem $(**)$

2. Existenz: $\forall x \in W$, sei $x$ gut wenn
$\exists F_x : (I_x, \leq) \cong \alpha_x$
sonst ist $x$ schlecht.




Bem Jede nach unten abg $X \subseteq Oz$ ist eine OZ

Klar: $x$ gut $\Rightarrow \forall y < x$: $y$ gut.

Beh: alle $x \in W$ sind gut

Bew: Wenn nicht, sei $x \in W$ kleinste schlecht.

Dann $\forall y < x$, $\exists \alpha_y \in Oz$ s.d. $I_y \cong \alpha_y$

$\Rightarrow x \cong \{\alpha_y : y < x\} \subseteq$ anf segm in $Oz$ $\Rightarrow \{\alpha_y : y < x\} \in Oz$

Also sind alle $x \in W$ gut.

$W \cong \bigcup\{\alpha_x : x \in W\}$

das ist aber wieder Anf. Segm. $\Rightarrow W \cong \gamma \in Oz$ $\boxtimes$

DEF: Solche $\alpha \cong W$ nennen wir Ordnungstyp von $W$

$\alpha = o.t(W)$

Korollar. Oz sind keine Menge!

Bew. Sonst wäre $(Oz, <) \cong (\alpha, \in)$ $\Rightarrow \alpha \in Oz$

$\Rightarrow \alpha = Oz$

$\Rightarrow \alpha \in \alpha$ $\lightning$ $\square$

Hartog's Theorem: Es gibt überabz. OZ.

Bew. Wenn AC: Sei $(\mathbb{R}, \trianglelefteq)$ eine WO der $\mathbb{R}$ Zahlen

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \trianglelefteq) \cong (\alpha, \in)$, dann $\alpha \in Oz$ überabz.

Ohne AC: Sei $WO_{abz} = \{(W,R) \; W \subseteq \mathbb{N}, R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ (Wohlordnungen)

Sei $\Gamma = \{\alpha \in Oz : \alpha \text{ abzählbar}\}$

Wenn $\Gamma$ eine Menge, dann $\Gamma \in Oz$

Aber dann ist $\Gamma$ überabz., denn sonst $\Gamma \in \Gamma$ $\lightning$

Um z.z. $\Gamma$ Menge, sei

$$F : WO_{abz} \longrightarrow \Gamma$$
$$(W,R) \longmapsto o.t(W,R)$$

Beh. F ist surj.

Beweis.

Beh: F surj.

Bew: Sei $\alpha$ abz. O.Z.

Dann $i : \alpha \cong \mathbb{N}$

Def. R indem $m R n :\Leftrightarrow i^{-1}(m) \in i^{-1}(n)$

Dann: $(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N}, R)$

$\Rightarrow F(\mathbb{N}, R) = \alpha$ $\boxtimes$ (Surj.)

Da $WO_{abz} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ist $WO_{abz}$ eine Menge.

Nach ERS. ist $\Gamma = F[WO_{abz}]$ auch eine Menge. $\boxtimes$

Dieses $\Gamma$ ist $\omega_1$.

Induktion und Rekursion auf OZ ist so wie auf beliebigen WO.

Arithmetik:

(1) $\alpha + 0 = \alpha$

$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$

$\alpha + \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} (\alpha + \xi)$ für Limes OZ $\lambda$

(2) $\alpha \cdot 0 = 0$

$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

$\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} (\alpha \cdot \xi)$ für Limes $\lambda$

(3) $\alpha^0 = 1$

$\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

$\alpha^\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha^\xi$

Das sind rekursive Def.

Bem $\alpha + \beta = o.t((\alpha, \in) \oplus (\beta, \in))$

$\alpha \cdot \beta = o.t((\alpha, \in) \otimes (\beta, \in))$

$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ | $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$

$\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$