Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Probeklausur

10. Juli 2017

Name:

Matrikelnummer:

Die Klausur dauert 105 Minuten (bis 16:00).

Es gibt insgesamt 60 Punkte in der Klausur; 30 Punkte sind ausreichend, um die Klausur zu bestehen.

Wenn Sie im Beweis Theoreme aus der Vorlesung verwenden, zitieren Sie bitte die Aussage der Theoreme präzise ohne Beweis: z.B. „Im folgenden verwenden wir den Satz von Cantor-Schröder-Bernstein: falls $A \preceq B$ und $B \preceq A$, so gilt $A \sim B$“.

Frage 1.	(12 Punkte)	**Frage 4.**	(12 Punkte)
Frage 2.	(12 Punkte)	**Frage 5.**	(12 Punkte)
Frage 3.	(12 Punkte)	***GESAMT***	(60 Punkte)
		NOTE	

Frage 1. *Peano-Strukturen & Induktion.*

Eine Struktur (X, S, x) mit $x \in X$ und $S : X \to X$ heißt *Peano-Struktur* falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(P1) S ist injektiv,

(P2) $x \notin \mathrm{ran}(S)$ und

(P3) falls $A \subseteq X$ mit $x \in A$ abgeschlossen ist unter S (d.h., falls $a \in A$, so auch $S(a) \in A$), dann ist $A = X$.

Falls (X, S, x) und (X', S', x') Strukturen sind, so heißt eine Bijektion $\pi : X \to X'$ *Isomorphismus*, falls $\pi(x) = x'$ und für alle $z \in X$ gilt, $\pi(S(z)) = S'(\pi(z))$.

Zeigen Sie, daß je zwei Peano-Strukturen isomorph sind.

Frage 2. *Ordnungen & Wohlordnungen.*

Falls $\mathbf{X}_0 = (X_0, <_0)$ und $\mathbf{X}_1 = (X_1, <_1)$ lineare Ordnungen sind, so definieren wir

1. die *Summe von* $\mathbf{X}_0$ *und* $\mathbf{X}_1$ durch $X := \{0\} \times X_0 \cup \{1\} \times X_1$, $(i, x) < (j, y)$ genau dann, wenn $i < j$ oder $i = j$ und $x <_i y$ und $\mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1 := (X, <)$;

2. die *Inverse von* $\mathbf{X}_0$ durch $x <^* y$ genau dann, wenn $y <_0 x$ und $\mathbf{X}_0^* := (X_0, <^*)$.

Zeigen Sie:

(i) Die Strukturen $\mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_0^*$ sind lineare Ordnungen.

(ii) Falls $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1$ Wohlordnungen sind, so ist $\mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1$ eine Wohlordnung.

(iii) Es gibt Wohlordnungen $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{X}_1$, so daß $\mathbf{X}_0^*$ eine Wohlordnung ist und $\mathbf{X}_1^*$ keine Wohlordnung ist.

Frage 3. *Ordinalzahlen.*

In der Vorlesung haben wir den Satz von der Cantor-Normalform bewiesen: für jede Ordinalzahl α gibt es eine eindeutig bestimmte endliche Folge $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n$, so daß $\alpha = \omega^{\alpha_0} + \omega^{\alpha_1} + ... + \omega^{\alpha_n}$. Bringen Sie die folgenden Ordinalzahlausdrücke in Cantor-Normalform (alle Operationen bezeichnen Ordinalzahloperationen). Geben Sie kurze Begründungen für die Umformungen:

(i) $\omega + \omega^2$,

(ii) $(\omega + 1) \cdot \omega^\omega$,

(iii) $(\omega^2 + \omega) \cdot (2 + \omega^2)$,

(iv) ω_1^ω,

(v) $\omega_1 + \omega^3$,

(vi) $(\omega^2 \cdot 3) + (2 \cdot \omega)$,

(vii) $\omega + \omega^\omega$,

(viii) $(\omega^\omega)^\omega + 1$,

(ix) $((\omega^\omega)^\omega)^\omega$,

(x) $\omega^{(\omega^{\omega_1})}$.

Frage 4. *Kardinalzahlen.*

Formulieren Sie den Hauptsatz der Kardinalzahlarithmetik (ohne Beweis) und zeigen Sie daraus:

(i) Für beliebige Kardinalzahlen κ und λ tritt einer der folgenden Fälle ein:

  (a) $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ oder

  (b) $\kappa^\lambda = \kappa$ oder

  (c) $\kappa^\lambda = \gimel(\mu)$ für ein μ mit $\mathrm{cf}(\mu) \leq \lambda < \mu$.

(ii) Falls $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$, so gilt $\gimel(\aleph_\omega) = 2^{\aleph_0}$ und $\gimel(\aleph_{\omega_1}) = 2^{\aleph_1}$.

Frage 5. *Polnische Räume und Borel-Mengen.*

Sei (X,d) ein polnischer Raum und $A \subseteq X$. Setze $\mathrm{G}_A := \{G \cap A\,;\, G \text{ ist } d\text{-offen in } X\}$ und

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_0^A &:= \mathrm{G}_A \cup \mathbf{\Sigma}_1^0(X,d),\\
\mathbf{\Pi}_\alpha^A &:= \{X \backslash B\,;\, B \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^A\},\\
\mathbf{\Sigma}_\alpha^A &:= \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,;\, A_n \in \mathbf{\Pi}_{\alpha_n}^A \text{ für } \alpha_n < \alpha\right\} \text{ falls } \alpha \neq 0.
\end{aligned}$$

Wir nennen eine Menge *A-Borel*, falls sie in einer der Mengen $\mathbf{\Sigma}_\alpha^A$ liegt. Zeigen Sie:

(i) $\mathbf{\Sigma}_{\omega_1}^A = \mathbf{\Pi}_{\omega_1}^A$ und

(ii) falls (X,d) überabzählbar ist, so gibt es genau $2^{\aleph_0}$ viele A-Borel-Mengen.