Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

**Vertiefung Mengenlehre**
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
**Übungsblatt 5**

Abgabe am Dienstag, 9. Mai 2017 am Anfang der Vorlesung.

Sei $\Phi$ eine Eigenschaft von Paaren von Mengen; wir schreiben $\Phi(x, y)$ für "das Paar $(x, y)$ hat die Eigenschaft $\Phi$". Die Eigenschaft $\Phi$ heißt *funktional*, wenn gilt: falls $x, y, y'$ Mengen sind und $\Phi(x, y)$ und $\Phi(x, y')$ gelten, so ist $y = y'$. (*Beispiel.* Die Eigenschaft "$y$ ist die Potenzmenge von $x$" ist funktional.) Wir wollen annehmen, daß unser Mengenuniversum die folgende Bedingung erfüllt:

> Ist $\Phi$ eine funktionale Eigenschaft und $x$ eine Menge, so existiert eine Menge $y$, so daß für alle $\eta$ gilt: $\eta \in y$ genau dann, wenn ein $\xi \in x$ existiert mit $\Phi(\xi, \eta)$.

Dies nennen wir auch die *Ersetzungsbedingung.* In einer axiomatischen Mengenlehre entspricht sie dem *Ersetzungsaxiom.*

(19) Warum heißt diese Bedingung Ersetzungsbedingung?

(20) Zeigen Sie unter Verwendung der Ersetzungsbedingung den *verallgemeinerten Rekursionssatz*: es sei $\Phi$ eine funktionale Eigenschaft von Paaren von Mengen und $(X, <)$ eine Wohlordnung. Dann gibt es eine Menge $Y$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $g : X \to Y$, so daß für alle $x \in X$ gilt: $g(x) = y$ genau dann, wenn $\Phi(g{\upharpoonright}\mathrm{AS}(x), y)$.

(21) Sei $M$ eine Menge von Ordinalzahlen. Zeigen Sie:

- (a) $\bigcup_{\alpha \in M} \alpha$ ist eine Ordinalzahl;
- (b) wenn $M$ kein größtes Element hat, ist $\bigcup_{\alpha \in M} \alpha$ eine Limesordinalzahl;
- (c) wenn $\bigcup_{\alpha \in M} \alpha \in M$, so ist diese Zahl das größte Element von $M$.

(22) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) Das Auswahlaxiom: für jede Menge $X$ von nichtleeren Mengen gibt es eine Funktion $f$ mit $\mathrm{dom}(f) = X$, so daß für jedes $x \in X$ gilt: $f(x) \in x$.
- (b) Für jede Menge $X$ von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen gibt es eine Menge $Z$, so daß für jedes $x \in X$ ein $\xi \in x$ existiert mit $Z \cap x = \{\xi\}$.

(23) Verwenden Sie das Auswahlaxiom, um das *Prinzip der abhängigen Auswahl* zu beweisen: angenommen $X$ ist eine nichtleere Menge und $R \subseteq X \times X$ ist eine Relation, so daß für jedes $x \in X$ ein $y \in X$ existiert mit $(y, x) \in R$. Dann gibt es eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(f(n+1), f(n)) \in R$.