Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 3

Abgabe am Dienstag, 25. April 2017 am Anfang der Vorlesung.

(10) Wir definieren eine *kardinale Multiplikationsoperation* auf $\mathbb{N}$: für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $n \otimes m$ die eindeutig bestimmte natürliche Zahl k, so daß $k \sim n \times m$. Zeigen Sie, daß dies wohldefiniert ist und mit der rekursive Definition der Multiplikation von Übungsblatt 1 übereinstimmt.

(11) Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie:

(a) $X^{Y \times Z} \sim X^Y \times X^Z$ und
(b) $X^{Y \times Z} \sim (X^Y)^Z$.

(12) Sei $(X, <)$ eine Wohlordnung. Wir sagen, daß ein Element x ein *Nachfolger* ist, falls ein $y \in X$ existiert, so daß x das kleinste Element von $\{z \in X\,;\, y < z\}$ ist. Elemente, die keine Nachfolger sind, nennen wir *Nichtnachfolger*. Wir sagen, daß $(X, <)$ *kein größtes Element hat*, wenn für alle $x \in X$ ein $y \in X$ existiert mit $x < y$.

(a) Sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, daß es bis auf Isomorphie genau eine Wohlordnung gibt, die kein größtes Element hat und genau $n + 1$ viele Nichtnachfolger besitzt.
(b) Zeigen Sie, daß die Aussage von Aufgabenteil (a) nicht auf unendliche Mengen von Nichtnachfolgern ausdehnbar ist: es gibt nicht-isomorphe Wohlordnungen $(X, <)$ und $(Y, <)$, die keine größten Elemente haben und unendlich viele Nichtnachfolger besitzen. Wir können sogar verlangen, daß die beiden Wohlordnungen die gleiche Anzahl von Nichtnachfolgern haben, also

$$\{\xi \in X\,;\, \xi \text{ ist Nichtnachfolger}\} \sim \{\eta \in Y\,;\, \eta \text{ ist Nichtnachfolger}\}.$$

(13) Seien $(X_0, <_0)$ und $(X_1, <_1)$ totale Ordnungen. Definieren Sie Relationen $<_\oplus$ und $<_\times$ auf $X_0 \oplus X_1$ und $X_0 \times X_1$ durch:

$$(b, x) \leqslant_\oplus (c, x') :\iff b < c \text{ oder } (b = c \text{ und } x <_b x');$$
$$(x, x') \leqslant_\times (y, y') :\iff x <_0 y \text{ oder } (x = y \text{ und } x' <_1 y').$$

Zeigen Sie, daß $<_\oplus$ und $<_\times$ totale Ordnungen sind. Zeigen Sie außerdem, daß, falls $<_0$ und $<_1$ Wohlordnungen sind, dann auch $<_\oplus$ und $<_\times$. (Warum sehen sich eigentlich die Definitionen von $<_\oplus$ und $<_\times$ so ähnlich?)