Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Vertiefung Mengenlehre
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 1

Abgabe am Dienstag, 11. April 2017 am Anfang der Vorlesung.

Die Klausur der Vorlesung *Vertiefung Mengenlehre* wird voraussichtlich am 11. Juli 2017 stattfinden. Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(a) schriftliche Bearbeitung von mindestens zehn der zwölf Übungsblätter;

(b) regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnehme in der Übungsgruppe (aktive Teilnahme beinhaltet Vorrechnen an der Tafel).

---

(1) In der Vorlesung hatten wir die Peano-Struktur $(\mathbb{N}, S, \varnothing)$ und eine Operation $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, definieren Sie rekursiv

$$M_n(\varnothing) := \varnothing$$
$$M_n(S(m)) := M_n(m) + n.$$

Wie bei der Operation $+$ definieren wir $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $n \cdot m := \cdot(n, m) := M_n(m)$. Zeigen Sie:

(i) für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n \cdot m = m \cdot n$ und

(ii) für $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt $(n + m) \cdot k = (n \cdot k) + (m \cdot k)$.

(2) Zeigen Sie, daß es eine induktive Menge I gibt, für die die Relation $\subseteq$ keine lineare Ordnung auf I bildet.

(3) In der Vorlesung hatten wir gesagt, daß eine Struktur (X, s, x_0) mit $s : X \to X$ und $x_0 \in X$ das *Prinzip der vollständigen Induktion* erfüllt, falls folgendes gilt:

> Angenommen, $X_0 \subseteq X$ ist eine Teilmenge mit $x_0 \in X_0$ und der Eigenschaft, daß wenn $x \in X_0$, so auch $s(x) \in X_0$. Dann ist $X_0 = X$.

Falls I eine induktive Menge ist, so definiert $S(x) := x \cup \{x\}$ eine unäre Operation auf I und $(I, S, \varnothing)$ ist eine Struktur. Zeigen Sie, daß es induktive Mengen I gibt, so daß $(I, S, \varnothing)$ nicht das Prinzip der vollständigen Induktion erfüllt.

(4) Falls (N, S, n_0) und (M, T, m_0) zwei Strukturen sind, so sagen wir, daß eine Bijektion $f : N \to M$ ein *Isomorphismus* ist, falls $f(n_0) = m_0$ und für alle $x \in N$ gilt, daß $f(S(x)) = T(f(x))$. Zeigen Sie, daß bis auf Isomorphie nur eine Peano-Struktur existiert.