Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Mathematik & Musik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Informationen zur Klausur

Die Klausur findet als Online-Klausur ("take-home exam") am **Montag, den 15. April 2024 von 8 bis 10 Uhr** statt. Um 8 Uhr wird die Klausur als pdf-Datei auf der Moodleseite freigeschaltet. Sie haben danach 120 Minuten, um die Klausur zu bearbeiten. Während dieser Zeit müssen Sie nicht online sein. Sie schreiben die Klausur **handschriftlich**, entweder auf Papier oder einer elektronischen Schreiboberfläche. Um 10 Uhr reichen Sie die Klausur als **einzelne pdf-Datei** auf der Moodleseite ein. Für das Einreichen haben Sie 15 Minuten Zeit (bis 10:15 Uhr).

Es wird eine **Wiederholungsklausur** geben. Derzeit ist sie vermutlich fälschlicherweise für einen Feiertag vorgesehen: falls Bedarf für die Wiederholungsklausur besteht, wird ein Termin im Monat Mai vom Studienbüro festgelegt und über Stine bekanntgegeben.

Hilfsmittel. Die Klausur ist eine *open book*-Klausur ("Kofferklausur"), d.h. Sie dürfen alle Hilfsmittel verwenden: Ihre Vorlesungsnotizen, die zur Verfügung gestellten Vorlesungsnotizen, beliebige Bücher, etc. Sie dürfen während der Klausur nicht mit anderen Personen in irgendeiner Form kommunizieren. Dies müssen Sie durch eine handschriftliche und unterschriebene Erklärung auf Ihrer Klausur bestätigen.

Erklärung. Nachdem Sie die Klausur um 10 Uhr fertiggestellt haben, schreiben Sie bitte auf die letzte Seite den folgenden Text und unterschreiben Sie:

> *Ich bestätige hiermit, daß ich während der Klausur eigenständig und ohne Unterstützung anderer Personen gearbeitet habe.*

Praktische Hinweise. Bitte sorgen Sie für eine Umgebung, in der sie 120 Minuten lang ungestört arbeiten können und zumindest am Anfang und Ende der Zeit eine stabile Internetverbindung haben. Bereiten Sie sich darauf vor, Ihre Lösungen am Ende der Klausur in einer einzelnen pdf-Datei zusammenzufassen. Haben Sie Ihre Klausur handschriftlich auf Papier geschrieben, halten sie eine Scansoftware (z.B. *Adobe Scan*), welche mehrere Bilder in eine einzelne pdf-Datei überführt bereit; haben Sie auf einer elektronischen Oberfläche geschrieben, stellen Sie vorher sicher, daß der Text einfach in eine einzelne lesbare (und nicht übermäßig große pdf-Datei gesichert werden kann.

Bevor Sie einreichen, überprüfen Sie, daß in der pdf-Datei

1. alle Seiten vorhanden sind,
2. alle Seiten gut lesbar sind,
3. die Eigenständigkeitserklärung vorhanden ist.

Erst danach reichen Sie die Datei über die Moodleseite ein.

Struktur der Klausur. Die Klausur besteht aus zwei Teilen. In *Teil I* geht es um Verständnis & Erklären in *Teil II* um Berechnen & Beweisen.

Teil I: Verständnis & Erklären wird zwei Aufgaben haben, je eine zum ersten Teil der Vorlesung ("Analysis") und eine zum zweiten Teil der Vorlesung ("Harmonie & Stimmungen"). Für jede dieser Aufgaben gibt es

4 Punkte	für eine ausreichende Bearbeitung
5 Punkte	für eine gute Bearbeitung
6 Punkte	für eine hervorragende Bearbeitung

also maximal 12 Punkte in *Teil I.* Die Bewertung "ausreichend" wird sehr großzügig vergeben werden, insbesondere wird eine Lösung mit kleineren Ungenauigkeiten und Fehlern immer noch die Bewertung "ausreichend" erhalten; die Bewertung "hervorragend" wird nur vergeben nur, wenn keinerlei Mängel vorliegen.

Teil II: Berechnen & Beweisen wird vier Aufgaben haben, von denen Sie beliebig viele bearbeiten können. Die korrekte Bearbeitung jeder dieser Aufgaben gibt 2 Punkte, also maximal 8 Punkte in *Teil II.*

Das Erreichen einer Gesamtzahl von 12 Punkten ist für das Bestehen der Klausur ausreichend.

Beispiele für Aufgaben aus *Teil I: Verständnis & Erklären* mit Musterlösungen.

Beispiel 1. *Erklären Sie den Begriff einer Schwebung und erläutern Sie, wie der Zusammenklang zweier Töne von 440 Hz und 445 Hz moduliert wird.*

Musterlösung (6 Punkte). Klingen zwei Töne von dicht beieinanderliegenden Frequenzen miteinander, so addieren sich die beiden Sinuswellen zu einer Sinuswelle der durchschnittlichen Frequenz auf, welche durch eine Kosinuswelle mit der Frequenz der Hälfte der Differenz der Frequenzen moduliert wird. Der Grund hierfür ist das folgende Sinusadditionstheorem

$$\sin u + \sin v = 2 \cdot \sin(\frac{u+v}{2}) \cdot \cos(\frac{u-v}{2}).$$

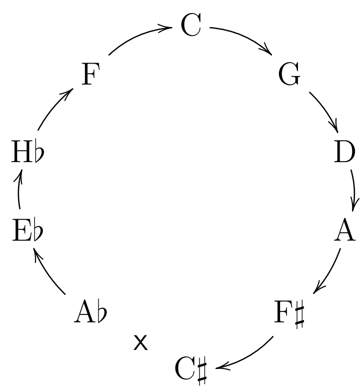
Im Falle von 440 Hz und 445 Hz ergibt sich

$$\sin(2\pi \cdot 440 \cdot \vartheta) + \sin(2\pi \cdot 445 \cdot \vartheta) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 442^1/_2 \cdot \vartheta) \cdot \cos(2\pi \cdot 2^1/_2 \cdot \vartheta),$$

die Schwebung hat also eine Modulation von $2^1/_2$ Hz.

Beispiel 2. *Erklären Sie den Quintenzirkel und warum er in der pythagoräischen Stimmung eigentlich eine Quintenspirale ist.*

Musterlösung (6 Punkte). Der Quintenzirkel entsteht, indem man von einem Grundton (in unserem Falle C) jeweils in Quinten nach oben und unten geht. Die Tonbezeichnung des um eine Quinte erhöhten bzw. verringerten Tons wird ermittelt durch Abschreiten der zyklisch fortgesetzten Tonleiter C–D–E–F–G–A–B–C um vier Grundtonbezeichnungen nach rechts bzw. links und entsprechende Erhöhung bzw. Verringerung durch ♯- oder ♭-Symbole, um sieben Halbtonschritte zu erreichen. Dies ergibt den Quintenzirkel wie folgt (der Pfeil bedeutet "Quinte nach oben"):



In der pythagoräischen Stimmung entspricht der Quintenschritt nach oben der Multiplikation mit $3/2$ oder $3/2^2$ (je nachdem, ob oktaviert werden muß) und der Quintenschritt nach unten der Multiplikation mit $2/3$ oder $2^2/3$. Somit sind die Frequenzen aller Töne, die im Quintenzirkel oberhalb des Grundtons liegen, Vielfache der Frequenz des Grundtons mit einem Faktor der Form $3^k/2^\ell$ für geeignete Zahlen k und ℓ; ebenso sind die Frequenzen aller Töne, die im Quintenzirkel unterhalb des Grundtons liegen, Vielfache der Frequenz des Grundtons mit einem Faktor der Form $2^k/3^\ell$ für geeignete Zahlen k und ℓ. Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung können daher Töne, die im Zirkel oberhalb des Grundtons liegen niemals identisch mit Tönen sein, die im Zirkel oberhalb des Grundtons liegen. Insbesondere schließt sich der Zirkel nicht (markiert als X): die Quinte unterhalb von A♭ ist D♭ $\neq$ C♯. Diese beiden Noten sind enharmonisch und nicht identisch. In der pythagoräischen Stimmung ist die Differenz zwischen D♭ und C♯ gerade das pythagoräische Komma ($3^{12}/2^{19}$).

Beispiele für Aufgaben aus *Teil II: Berechnen & Beweisen* ohne Musterlösungen.

Beispiel 1.

Eine Gitarre hat sechs Saiten mit linearer Dichte von $1\,\mathrm{g\,m^{-1}}$ und schwingender Länge von 65 cm, welche auf 329 Hz, 246 Hz, 196 Hz, 146 Hz, 110 Hz und 82 Hz gestimmt sind. Berechnen Sie die Gesamtspannkraft aller sechs Saiten (in Newton), welche auf die Gitarre wirkt. Begründen Sie Ihre Antwort durch die entsprechenden Rechenschritte.

[*Hinweis.* Sie dürfen alle Formeln aus der Vorlesung verwenden, wenn Sie sie korrekt formulieren.]

Beispiel 2.

Bestimmen Sie die Frequenz, welche in der pythagoräischen Stimmung dem Tonsymbol $\mathsf{A}\sharp$ zugewiesen wird, ausgedrückt als Vielfaches der Frequenz des Grundtons C (also eine Zahl ν mit $1 \leq \nu \leq 2$). Begründen Sie Ihre Antwort.

Beispiel 3.

Betrachten Sie die folgende Stimmung in Eitz-Notation. Sie wollen diese Stimmung in einer Art und Weise ergänzen, daß die ergänzte Stimmung rein für E-Dur, A-Dur und B-Dur ist. Geben Sie die Eitz-Notation aller Töne an, die zusätzlich gestimmt werden müssen, um dieses Ziel zu erreichen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathsf{E}^{-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathsf{B}^{-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathsf{F}\sharp^{-1} \arrow[dr] & \\
\mathsf{C}^{0} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathsf{G}^{+1/2} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathsf{D}^{+3/4} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathsf{A}^{-1}
\end{tikzcd}$$

Beispiel 4.

Seien $f(x) := \sin(x)$, $g(x) := \sin(2x)$ und $h(x) := \sin(4x)$. Zeigen Sie, daß die Menge $\{f, g, h\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums aller reellwertigen Funktionen $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.