Mathematik & Musik

VIII

Achte Vorlesung

27. März 2024

Nachmittags 14 Uhr

Erinnerung:

Keine endliche Oktav-aufteilung kann unter rationalen Tonintervallen abgeschlossen sein.

Ansatz 1 Irrationale Aufteilung.

Ansatz 2 Pythagoras: Quintenzirkel.

	$(3/2)^k$	$o((3/2)^k)$	Tonbezeichnung
Grundton	1	1	C
Erste Quinte nach oben	$3/2$	$3/2$	G
Zweite Quinte nach oben	$3^2/2^2$	$3^2/2^3 = 9/8$	D
Dritte Quinte nach oben	$3^3/2^3$	$3^3/2^4 = 27/16$	A
Vierte Quinte nach oben	$3^4/2^4$	$3^4/2^6 = 81/64$	E
Fünfte Quinte nach oben	$3^5/2^5$	$3^5/2^7 = 243/128$	B
Sechste Quinte nach oben	$3^6/2^6$	$3^6/2^9 = 729/512$	F♯

	$(3/2)^k$	$o((3/2)^k)$	Tonbezeichnung
Grundton	1	1	C
Erste Quinte nach unten	$2/3$	$2^2/3^1 = 4/3$	F
Zweite Quinte nach unten	$2^2/3^2$	$2^4/3^2 = 16/9$	B♭
Dritte Quinte nach unten	$2^3/3^3$	$2^5/3^3 = 32/27$	E♭
Vierte Quinte nach unten	$2^4/3^4$	$2^7/3^4 = 128/81$	A♭
Fünfte Quinte nach unten	$2^5/3^5$	$2^8/3^5 = 256/243$	D♭
Sechste Quinte nach unten	$2^6/3^6$	$2^{10}/3^6 = 1024/729$	G♭

Abstand zwischen F# & Gb: $3^{12}/2^{19}$

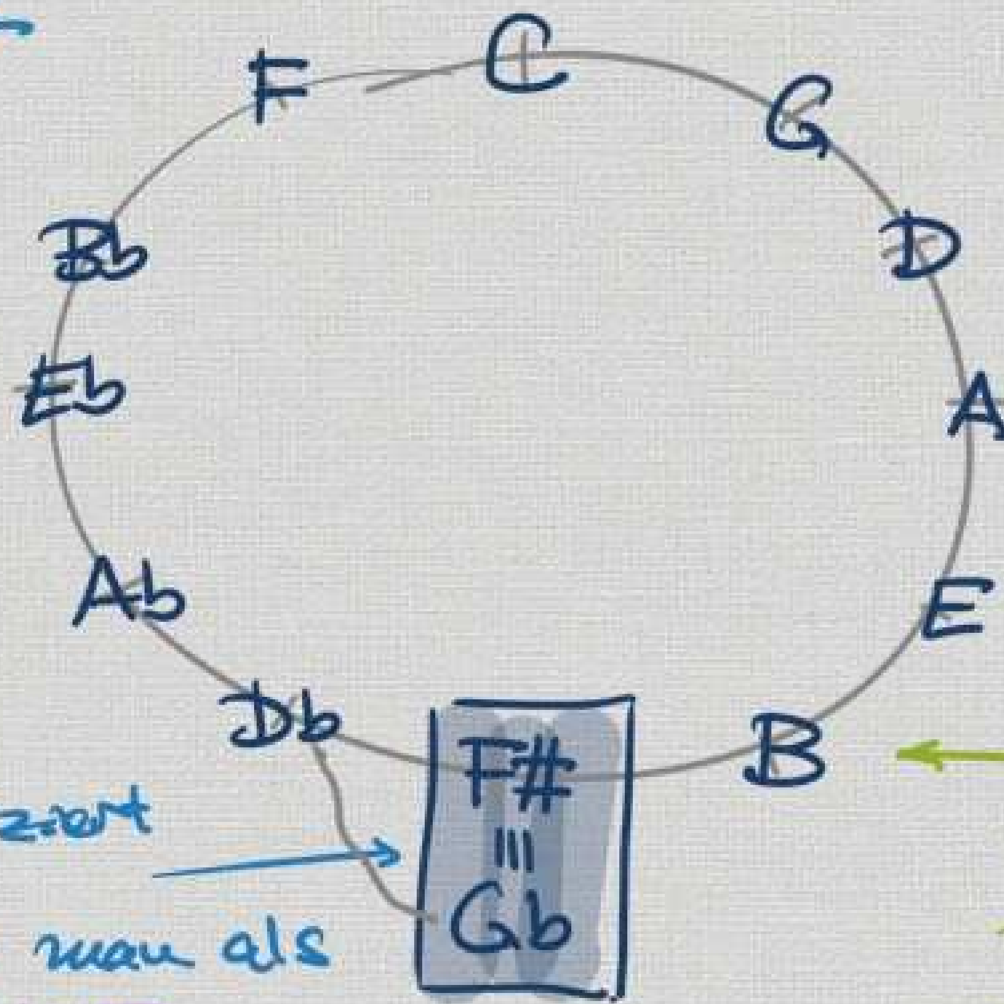
ca. ein Achtel Tonabstand

PYTHAGORÄISCHES KOMMA

Das pythagoräische Komma kann als klein genug angesehen werden, um Töne zu identifizieren, falls x, y

$x = yp$ mit $p = 3^{12}/2^{19}$.

QUINTENZIRKEL



Identifiziert

Im Deutschen eigentlich H. B ist die englische Bezeichnung.

Dies bezeichnet man als ENHARMONIE.

Die Relation $x = yp$ ist nicht transitiv, also keine Äquivalenzrelation

$$x \equiv_p y :\iff \text{es gibt ein } n \geq 0, \text{ so daß } \mathrm{o}(p^n \cdot x) = y \text{ oder } \mathrm{o}(p^n \cdot y) = x.$$

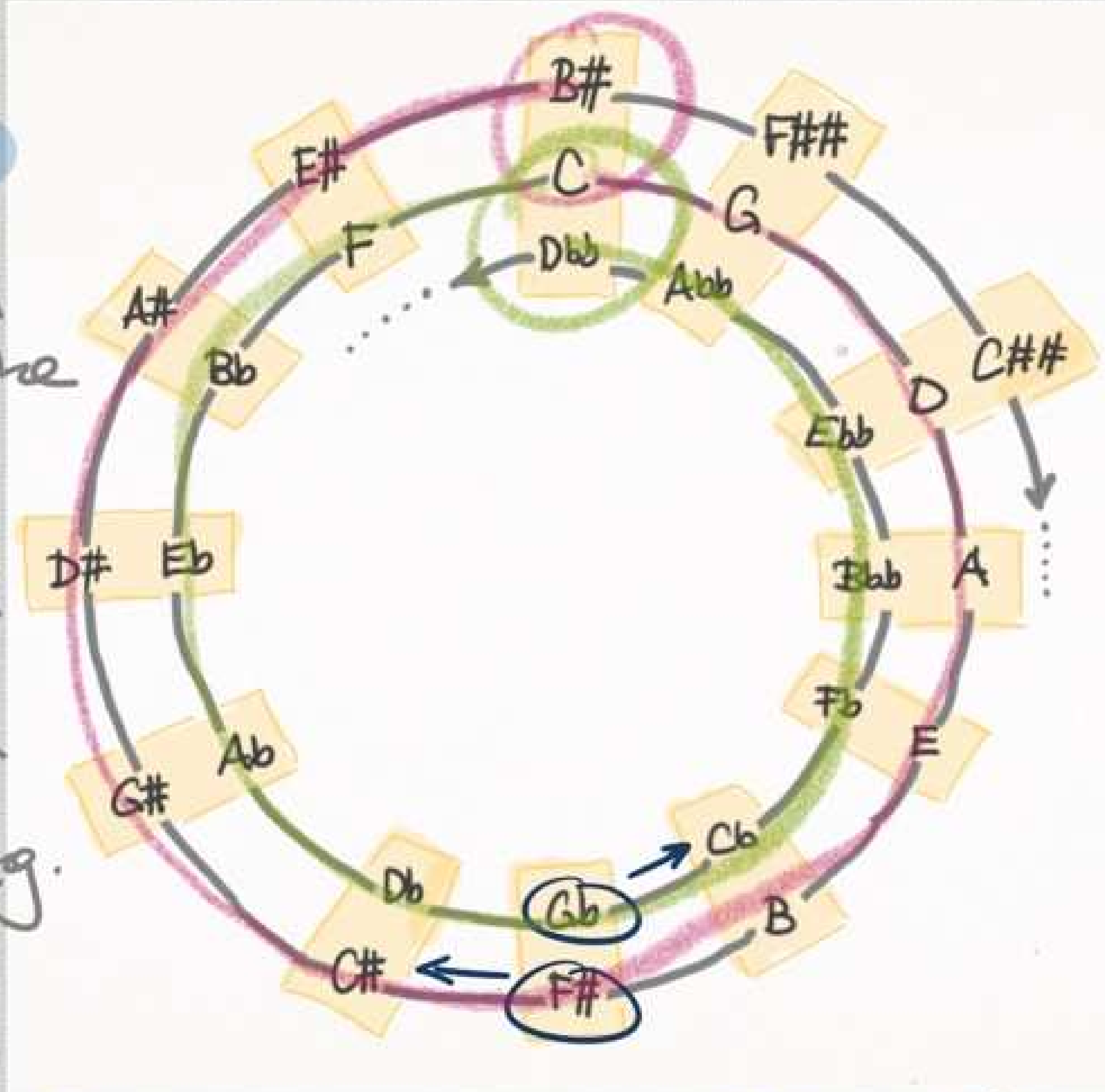
Aufgabe 29. Zeigen Sie, daß $\equiv_p$ eine Äquivalenzrelation ist und daß für die in den Tabellen definierten Töne C, G, D, A, E, B, F♯, F, B♭, E♭, A♭, D♭ und G♭ gilt, daß F♯ $\equiv_p$ G♭ und daß alle anderen paarweise nicht-äquivalent bzgl. $\equiv_p$ sind.

Der Quintenzirkel ist kein echter Zirkel, sondern nur ein Zirkel bis auf Enharmonie.

QUINTEN-SPIRALE

Der Quintenzirkel ist eigentlich eine Quintenspirale.

Diese schließt sich nie wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.



F# $\frac{729}{512} = 3^6/2^9$

C# $3^7/2^{11}$

G# $3^8/2^{12}$

D# $3^9/2^{14}$

A# $3^{10}/2^{15}$

E# $3^{11}/2^{17}$

"his" B# $3^{12}/2^{19} = p$

Damit ist der Abstand von B# und Dbb ZWEI pythagoräische Kommas.

Gb $\frac{1024}{729} = \frac{2^{10}}{3^6}$

Cb $\frac{2^{12}}{3^7}$

Fb $\frac{2^{12}}{3^8}$

Bbb $\frac{2^{13}}{3^9}$

Ebb $\frac{2^{15}}{3^{10}}$

Abb $\frac{2^{16}}{3^{11}}$

Dbb $\frac{2^{18}}{3^{12}}$

Bemerkung 1.

Da $p = \frac{3^{12}}{2^{19}} > 1$, ist die Folge $n \longmapsto p^n$ unbeschränkt, also insbesondere:

für jedes $q \in (1,2)$ existiert n, so daß

$$p^n > q.$$

z.B. $\frac{9}{8}$ ist ein Ganztonschritt und $p^9 > \frac{9}{8}$. Das bedeutet, daß der Abstand zwischen

B#####
Dbbbbb

größer als ein Ganztonschritt ist.

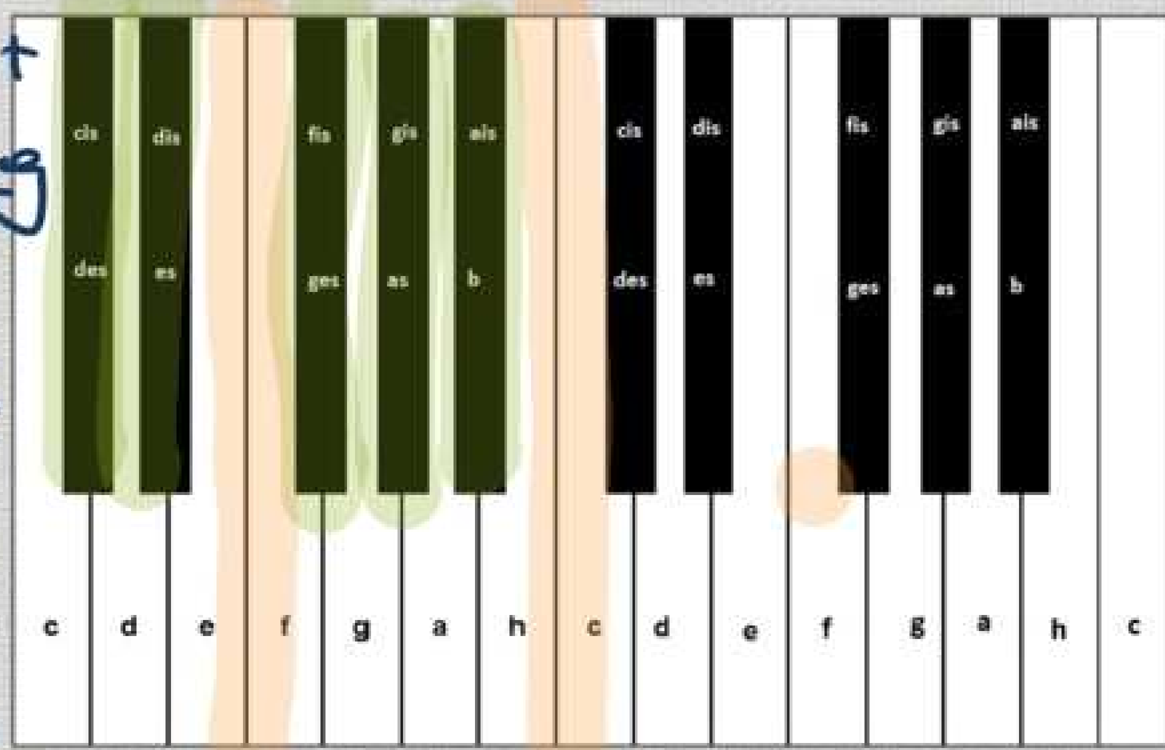
Bemerkung 2.

In der gesamten Quintenspirale haben alle Töne nur 2 und 3 als Primfaktoren.
Somit also keine 5 und daher taucht keine Terz ($\frac{5}{4}$ oder $\frac{6}{5}$) in der Quintenspirale auf.

$\rightsquigarrow$ Kapitel 6
(Stimmungen)

§ 5.4 Die Tonleiter

Der Quintenzirkel gibt uns eine Zwölfteilung der Oktave vor.



Sortieren wir die 12 Töne nach Größe erhalten wir die

TONLEITER

C	D♭	D	E♭	E	F	F♯	G	A♭	A	B♭	B
1	$^{256}/_{243}$	$^{9}/_{8}$	$^{32}/_{27}$	$^{81}/_{64}$	$^{4}/_{3}$	$^{729}/_{512}$	$^{3}/_{2}$	$^{128}/_{81}$	$^{27}/_{16}$	$^{16}/_{9}$	$^{243}/_{128}$
1,000	1,053	1,125	1,185	1,266	1,333	1,424	1,500	1,580	1,688	1,778	1,898
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[3]{2})^2$	$(\sqrt[4]{2})^3$	$(\sqrt[6]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$
1,000	1,059	1,122	1,189	1,260	1,335	1,414	1,498	1,587	1,682	1,782	1,888

gleichtönige Tonleiter mit $\sqrt[12]{2}$

Berechnen wir die Abstände:

$C:D \quad 9/8$

$D:E \quad 81/64 \cdot 8/9 = 9/8$

$E:F \quad 4/3 \cdot 64/81 = 256/243$

$F:G \quad 3/2 \cdot 3/4 = 9/8$

$G:A \quad 27/16 \cdot 2/3 = 9/8$

$A:B \quad 243/128 \cdot 16/27 = 9/8$

$B:C \quad 2 \cdot 128/243 = 256/243$

$9/8$ den pythagoräischen Ganztonschritt

$256/243$ den pythagoräischen Halbtonschritt

Es fällt auf:

Falls $g = 9/8$ und $h = 256/243$,

so ist $h^2 \neq g$.

Der Abstand ist

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^{16}}{3^{10}}$$

$g h^{-2} = p$

$g = h^2 p$

$$g h^{-2} = \frac{9}{8} \cdot \frac{3^{10}}{2^{16}} = \frac{3^2}{2^3} \cdot \frac{3^{10}}{2^{16}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

Das pythagoräische Komma

Wir können auch ausrechnen:

$$\left.\begin{array}{l} C : Db \\ D : Eb \\ F : Gb \\ G : Ab \\ A : Bb \end{array}\right\} \frac{256}{243}$$

Man beachte, da F# ein pythag. Komma höher liegt als Gb, gilt

$F : Gb = h$

$Gb : F\# = p$

$F : G = g$

$\Rightarrow F : F\# = hp$

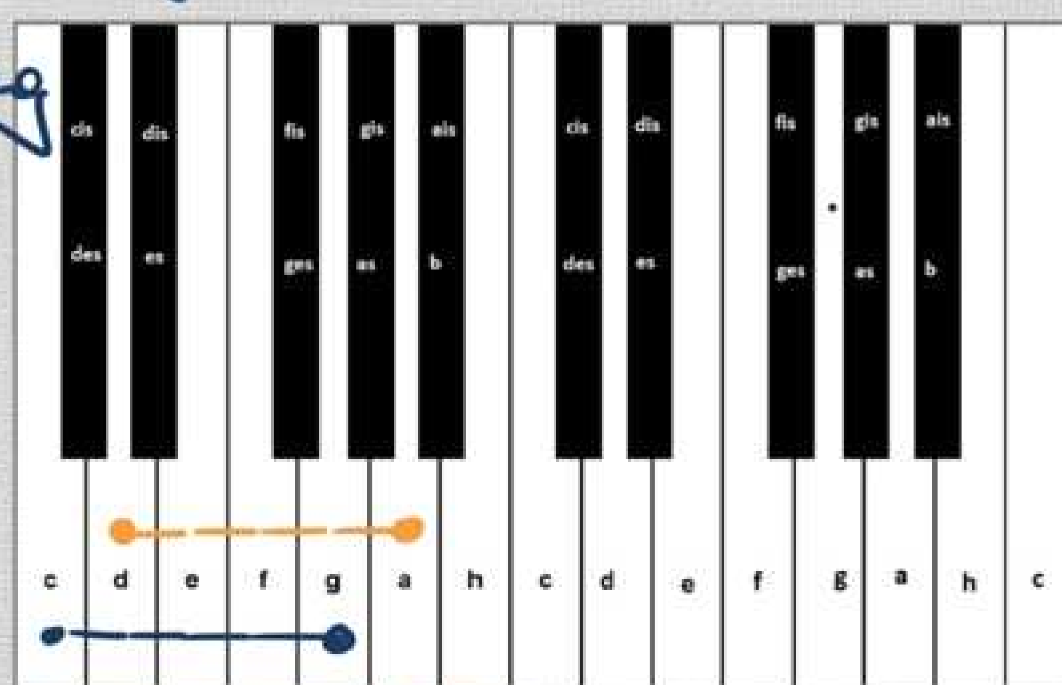
$\Rightarrow \underline{\underline{F\# : G}} = g h^{-1} p^{-1}$

$= h^2 p h^{-1} p^{-1} = \underline{\underline{h}}$

§ 5.5 Tonbezeichnungen

Eine **Grundbezeichnung** ist entweder C, D, E, F, G, A oder B.

Sie sind zyklisch angeordnet.



CDEFGAB

Feinposition

$$C < D < E < F < G < A < B \dashrightarrow C$$

gp	0	1	2	3	4	5	6
fp	0	2	4	5	7	9	11

Grundposition

„Abstand" z.B $d_g(D,G) = 4-1 = 3$

Grundabstand

zyklisch z.B $d_g(\underset{1}{A},\underset{5}{D}) = 1-5 = -4 \equiv 3 \pmod 7$

Mathematisch

$$d_g(X,Y) := gp(Y) - gp(X) \mod 7$$

$$d_f(X,Y) := fp(Y) - fp(X) \mod 12$$

Def. Ein Tonbezeichnung ist eine endliche Folge, welche mit einer Grundtonbezeichnung beginnt und dann endlich viele (möglicherweise keine) #-Symbole oder endlich viele b-Symbole hat.

Sind X und Y Tonbezeichnungen mit X' und Y' Grundbezeichnung in X und Y, so ist $d_g(X,Y) := d_g(X',Y')$. Der Fernabstand wird rekursiv definiert durch:

$$
\begin{cases}
d_f(X\flat, Y) = d_f(X, Y\sharp) := d_f(X,Y) + 1, \\
d_f(X\sharp, Y) = d_f(X, Y\flat) := d_f(X,Y) - 1, \\
d_f(X\sharp, Y\sharp) = d_f(X\flat, Y\flat) := d_f(X,Y), \\
d_f(X\sharp, Y\flat) := d_f(X,Y) - 2 \text{ und} \\
d_f(X\flat, Y\sharp) := d_f(X,Y) + 2.
\end{cases}
$$

<u>Beispiele</u>

$$d_f(D\#\#, Gb) = d_f(D,G) - 2 - 1 = 5 - 3 = 2$$

$$d_g(D, F\#) = d_g(D,F) = 2$$

$$d_f(D, F\#) = d_f(D,F) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Def. Falls X eine Tonbezeichnung ist,
so heißt Y

SUBDOMINANTE zu X

falls $d_g(X,Y)=3$ & $d_f(X,Y)=\underline{\underline{5}}$

DOMINANTE zu X

falls $d_g(X,Y)=4$ & $d_f(X,Y)=7$

Bsp. Die Dominante zu D ist A, da
$d_g(D,A)=4$ und
$d_f(D,A)=9-2=7$.

Fb: Die Subdominante von Fb
Bbb, da $d_f(Fb,Bbb) = 6+1-2=5$

Die Dominante von $F\underline{b}$
Cb, da $d_f(Fb,Cb) = 7+1-1 = 7$.

Diese Begriffe erlauben uns jetzt, die pythagoräische Tonleiter sauber zu definieren.

Def. Eine Tonleiter / Stimmung ist eine Funktion T, die jeder Tonbezeichnung eine Zahl im Oktavbereich zuweist.

Definiere nun die pythagoräische Tonleiter rekursiv:

(1) Die Tonbezeichnung C erhält den Wert 1.

(2) Falls X kein b enthält und $T(X)$ bereits definiert ist, so sei Y die Dominante von X und setze

$$T(Y) = \tfrac{3}{2}T(X) \quad \text{oder} \quad \tfrac{3}{4}T(X)$$

um im Oktavbereich zu bleiben

(3) Falls X kein # enthält und $T(X)$ bereits definiert ist, sei X die Dominante von Y und setze $T(Y) = \tfrac{2}{3}T(X)$ oder $\tfrac{4}{3}T(X)$

um im Oktavbereich zu bleiben

Kapitel 6: Stimmungen

Eine Stimmung oder Tonleiter ist eine Funktion T, welche den Tonbezeichnungen Elemente des Oktavbereichs zuweist.

→ Pythagoräische Stimmung

Vorteile: viele Quinten, sehr regelmäßig

Nachteile: $g \neq k^2$

Enharmonie:

C	D♭	D	E♭	E	F	F♯	G	A♭	A	B♭	B
1	256/243	9/8	32/27	81/64	4/3	729/512	3/2	128/81	27/16	16/9	243/128
1,000	1,053	1,125	1,185	1,266	1,333	1,424	1,500	1,580	1,688	1,778	1,898
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[3]{2})^2$	$(\sqrt[4]{2})^3$	$(\sqrt[6]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$
1,000	1,059	1,122	1,189	1,260	1,335	1,414	1,498	1,587	1,682	1,782	1,888

Nachteile: Gar keine rationalen Intervalle.

Hier ist $g = \sqrt[6]{2}$, $k = \sqrt[12]{2}$; $k^2 = g$

Vorteile: noch viel regelmäßiger

→ Gleichtönige Stimmung

§ 6.1 Terzen

Die pythagoräische Stimmung hat überhaupt keine Terzen.

Pythagoräisch

C : 1

E : 81/64

G : 3/2

C : E : G

$$\frac{5}{4} \neq 81/64 \qquad \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{81} = \frac{32}{27} \neq \frac{6}{5}$$

Abstand zwischen großer Terz und pythagoräischen E:

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80} = 1{,}0125$$

$$\text{vgl. } p = 3^{12}/2^{19} \approx 1{,}0136$$

Diese Zahl ist ungefähr so groß wie ein pythagoräisches Komma, aber nicht ganz.

Nennen sie das SYNTONISCHE KOMMA.