Mathematik & Musik

VORLESUNG VII

Mittwoch 27. März 2024
VORMITTAGS (11^{15} – 12^{45})

Die Vorlesungen am Montag, 25. März 2024 sind leider krankheitsbedingt ausgefallen: damit sind wir nun DREI VORLESUNGEN im Rückstand.

Wir müssen uns auf Ersatztermine (vermutlich einen oder zwei) in der ersten Semesterwoche einigen.

Das werden wir per

MOODLE – Umfrage

machen.

Diese Ergänzungsvorlesung hat einen

ANALYSIS & ANGEW. MATHEMATIK – Teil

(Vorlesungen I – VI) und einen

ALGEBRA, GEOMETRIE, & DISKRETE MATH.–

Teil (Vorlesungen VII +). Wir werden nun die Ergebnisse der VL I – VI nutzen.

Einleitung EINLEITUNG → Pythagoräische Prinzip
1 WOHLKLANG ⟺ kleine ganzzahl. Zahlverh.

→ Tonrekonstruktion aus zusammengesetzten Klang 2

KAPITEL 2 Federpendel

⇝ Sinusschwingungen

KAPITEL 3 Wellengleichung

Partielle Dgl.

→ Lösungen sind immer periodisch

KAPITEL 4 Fourieranalyse

Periodische Fkt. haben stets ein Fourierspektrum (eindeutig)

D.h. jeder Klang (= periodische Fkt. mit Grundfreq. ν) hat ein eindeutig bestimmtes Spektrum.

Das beantwortet 2;
da das Spektrum aus ganzzahligen Vielfachen der Grundfr. besteht, gibt es auch einen ersten Hinweis zu 1

Nachtrag zur Frage der Eindeutigkeit.

Das Fourierspektrum eines Klangs ist nach dem Satz von Cantor eindeutig — aber heißt das, daß wir **IMMER** die ursprüngliche Zusammensetzung rekonstruieren können?

Die folgenden Werte sind stark vereinfachte Approximationen der Spektren von Flöte, Geige und Klarinette. Man stellt fest, daß die Flöte nur relativ wenige Obertöne hat, während die Geige noch bei der zehnten Harmonischen nichttriviale Koeffizienten hat. Bei der Klarinette fällt auf, daß nur die ungeradezahligen Koeffizienten auftauchen.

Instrument	1ν	2ν	3ν	4ν	5ν	6ν	7ν	8ν	9ν	10ν
Flöte	1	1	.1	.2	.2	0	0	0	0	0
Geige	1	.6	.6	.7	.4	.2	.4	.3	.4	.4
Klarinette	1	0	.4	0	.2	0	.1	0	0	0

Diese sehr charakteristischen Spektren erlauben es uns, die Einzelinstrumente auch beim Zusammenklang wiederzuerkennen. Haben wir z.B. ein Klangspektrum mit den folgenden Werten, so können wir dies als Zusammenspiel einer Geige mit 300 Hz, einer Klarinette mit 400 Hz und einer Flöte mit 500 Hz, alle mit gleicher Amplitude, erkennen.

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
0+			1	1	1	.6			.6	
1000+		2.1			.4			.3		
2000+	.4			.5			.4	.1		.6

300 600 900 1200

1 .6 .6 .7 ...

400 800 1200

1 0 .4

Ein Beispiel, daß dies nicht immer klappt:

Zwei fiktive Instrumente mit Spektren

	1ν	2ν	3ν
Prima	1	1	0
Secunda	1	0	.5

100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
0	1	0	1	0	.5	0	0	0	0	0	.5
	ν ν		ν 2ν		3ν ν						3ν 2ν

Kann entstanden sein

A durch Prima-Klang 200 Hz
und Prima-Klang mit Amplitude 0.5 mit 600 Hz

B durch Sekunda-Klang 200 Hz
und Sekunda-Klang 400 Hz

KAPITEL 5 Harmonie

§5.1 Was ist Wohlklang?

Pythagoräisches Prinzip:

Wohlklang entspricht
kleinen ganzzahligen Verhältnissen

Dies verläßt den Bereich der Mathematik:
Die Mathematik kann höchstens sagen, daß zwei Klänge unterschiedlich sind und inwieweit sie sich unterscheiden, aber nicht, welchen wir als angenehmer empfinden sollten.

Aus der Fourieranalyse folgt, daß Klänge gemeinsam mit ihren Obertönen auftauchen.

z.B. ein Klang mit Grundfreq. 200 Hz
und einer mit 400 Hz:

Obertöne: 200 :	200	400	600	800	1000	1200	1400	..
400 :		400		800		1200		...

Wir stellen fest (bei der Oktave), daß die Obertöne der Oktave komplett enthalten sind in den Obertönen des Klangs mit 200Hz

<u>Bsp. 2</u> 200/300 Hz

200	400	**600**	800	1000	**1200**	1400	1600	**1800.**
	300	**600**		900	**1200**		1500	**1800**

Jeder zweite Oberton von 300 Hz ist auch Oberton von 200 Hz;
jeder dritte Oberton von 200 Hz ist auch Oberton von 300 Hz.

Wir bezeichnen solche Überlappung der Spektren als <u>Spektrumsähnlichkeit</u>

auch HARMONIZITÄT.

Wir stellen fest:

Um so kleiner das ganzzahlige Bruchverhältnis ist, desto größer ist die Spektrumsähnlichkeit/Harmonizität.

Damit ist das pythagoräische Prinzip:

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen Harmonizität und Wohlklangsempfinden.

PSYCHOAKUSTIK

Empirische Experimente zeigen, daß die Wirklichkeit nicht direkt dem pythagoräischen Prinzip entspricht:
Harmonizität ist nicht der einzige Faktor beim Wohlklangempfinden

Hermann von Helmholtz

Born	Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz 31 August 1821 Potsdam, Province of Brandenburg, Kingdom of Prussia, German Confederation
Died	8 September 1894 (aged 73) Charlottenburg, Province of Brandenburg, Kingdom of Prussia, German Empire

DIE LEHRE

VON DEN

TONEMPFINDUNGEN

ALS

PHYSIOLOGISCHE GRUNDLAGE

FÜR DIE

THEORIE DER MUSIK.

VON

H. HELMHOLTZ.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1863.

RAUHIGKEIT

Hängt mit unseren Schwebungen zusammen:
Zusammenklang von Tönen der Frequenzen

$\nu+\varepsilon \quad \nu-\varepsilon$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

gibt: Sinusschwingung mit Frequenz ν moduliert durch $\cos(\varepsilon)$.

Falls ε sehr klein ist $\varepsilon = 1, 2, 3$, so daß wir Schwingungen mit Freq. ε nicht als Ton empfinden, so nennen wir dies Schwebung.

Sobald ε groß genug wird, daß wir die Schwebung als eigenen Ton empfinden, so erzeugt dies ein BRUMMEN

RAUHIGKEIT

Ist allerdings $\nu = k\mu$ und $\varepsilon = l\mu$, so gilt

$$\sin((\nu+\varepsilon)x) + \sin((\nu-\varepsilon)x)$$

$$= 2\sin(\underset{\substack{\uparrow\\ k\mu}}{\nu} x)\cos(\underset{\substack{\uparrow\\ l\mu}}{\varepsilon} x)$$

und wir haben Harmonie zwischen dem Ton und der modulierten Schwingung.

Helmholtz: Um so geringer die Rauhigkeit, desto eher empfinden wir den Ton als Wohlklang.

Aufgabe 26. Verwenden Sie die Schwebungsformel

$$\sin(\nu x + \varepsilon x) + \sin(\nu x - \varepsilon x) = 2\sin(\nu x) \cdot \cos(\varepsilon x),$$

um die Rauhigkeit eines Zusammenklangs von zwei Tönen der Frequenzen 440 Hz und 425 Hz zu ermitteln. Warum ist der Zusammenklang der errechneten Sinusschwingung mit der Kosinusmodulation nicht spektrumsähnlich?

Heutzutage:

Psychoakustik geht davon aus, daß Wohlklang ein komplexes Zusammenspiel aus

HARMONIZITÄT
RAUHIGKEIT
GEWOHNTHEIT

ist.

Zusammenfassend

Kleine ganzzahlige Vielfache spielen eine wesentliche Rolle bei zwei der drei Faktoren des Wohlklangs-empfindens.

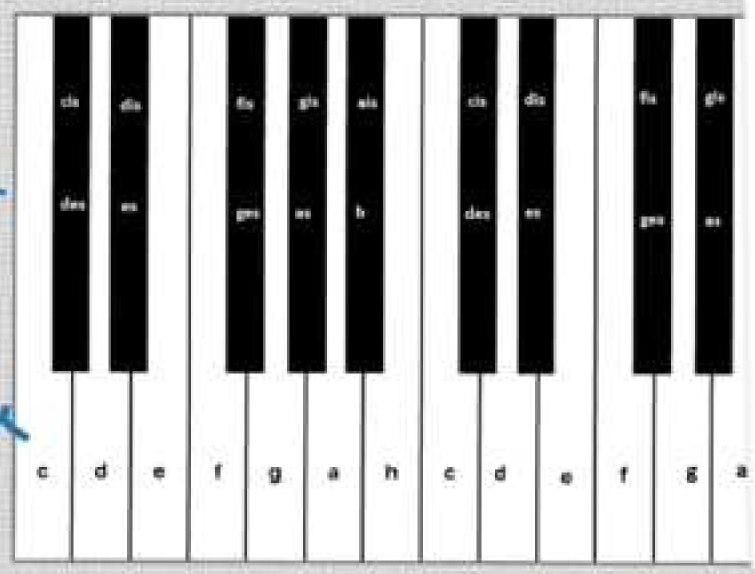
Verhältnisse zwischen den ersten Obertönen:

2:1 OKTAVE
3:2 QUINTE
4:3 QUARTE
5:4 GROSSE TERZ
6:5 KLEINE TERZ
9:8 SEKUNDE

8:5 KLEINE SEXTE
5:3 GROSSE SEXTE
7:4 SEPTIME
3:1 DUODEZIME
4:1 DOPPELOKTAVE

§ 5.2 OKTAVAUFTEILUNGEN

Bei vielen Instrumenten (Flöte, Blasinstrumente, Klavier, Orgel etc.) müssen wir beim Bau des Instruments festlegen, welche Töne wir spielen können.



Mathematisch: Wir identifizieren die Oktave mit dem Intervall $[1,2]$. Hier ist 1 der Grundton und 2 die Oktave.

Falls $x<y$ Töne in diesem OKTAVBEREICH sind, so ist $\frac{y}{x}$ der Abstand zw. x und y.

ACHTUNG: Also ist Abstand multiplikativ: das bedeutet, daß der halbe Abstand von q gerade die Wurzel $\sqrt{q}$ ist:

$x<y$ $\quad \frac{y}{x}$ ist der Abst. Dann ist $\sqrt{\frac{y}{x}}$ der halbe Schritt zw. x und y:

$$x \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} = x \cdot \frac{y}{x} = y.$$

Ziel Wähle endlich viele Punkte im Oktavbereich, so daß ich möglichst viele wohlklingende Tonintervalle spielen kann.

Def. Eine OKTAVAUFTEILUNG ist eine endliche Liste

$$1 = q_0 < \dots < q_n = 2$$

von Tönen im Oktavbereich.

Eine Oktavaufteilung ist unter dem Tonintervall $q \in (1,2)$ abgeschlossen, falls für jedes x in der Oktavaufteilung auch $q \cdot x$ oder $\frac{q \cdot x}{2}$ in der Oktavaufteilung ist.

Dies ist ggf. notwendig, falls $q \cdot x > 2$.

Grundsätzliche Frage

Gibt es überhaupt Oktavaufteilungen, die unter einem Tonintervall q abgeschlossen sind?

Antwort: Das hängt davon ab, was q ist!

Falls wir den Oktavbereich in n gleiche Teile teilen wollen, so wählen wir

$$q_i = \left(\sqrt[n]{2}\right)^i.$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \sqrt[n]{2} \quad q_n = \left(\sqrt[n]{2}\right)^n = 2.$$

Dann ist diese Oktavaufteilung abgeschlossen unter $\sqrt[n]{2} = q$ und auch unter $\left(\sqrt[n]{2}\right)^i$ für jedes i.

Diese Aufteilung ist abgeschlossen unter irrationalen Tonintervallen — diese sind nach VL $\underline{\text{VI}}$ (Seite 384) nicht einmal periodisch also keine Wohlklänge.

Stattdessen: wir wollen Abgeschlossenheit unter rationalen Intervallen mit kleinen ganzzahligen Zähler & Nenner (z.B. 3/2, 4/3, 5/4 ...)

Satz Keine Oktavaufteilung ist abgeschlossen unter $q \in (1,2)$, falls q rational ist.

Beweis Schreiben wir q als Primfaktorzerlegung

$$q = \prod_{p \text{ Primzahl}} p^{z_p}$$

wobei $z_p \in \mathbb{Z}$ und $z_p = 0$ für alle bis auf endlich viele p.

Da $q \in (1,2)$ gibt es eine Primzahl $p \neq 2$ mit $z_p \neq 0$.

Sei q_i irgendein Element der Oktavaufteilung, dann habe ich $q_i \cdot q$, $q_i \cdot q^2$, $q_i \cdot q^3$, $\dots$, $q_i \cdot q^k$ als Schritte um das Tonintervall q nach oben. Falls die Oktavaufteilung unter q abgeschlossen ist, müssen diese alle (bis auf Teilen durch eine Potenz von 2) in der Oktavaufteilung auftauchen.

Aber in der Primfaktorzerlegung von q^k taucht p gerade $k \cdot z_p$ mal auf. Also sind die unendlich viele verschiedene Zahlen. Aber die Oktavaufteilung war endlich. Widerspruch. q.e.d.

Konsequenz

Es ist unmöglich, eine Flöte/Klavier zu bauen, welche für jeden Ton auch immer den um eine Quinte erhöhten Ton spielen kann.

Zwei Lösungsansätze

(1) Wähle $(\sqrt[n]{2})^i$ als Oktavaufteilung.
Dann treten gar keine Quinten auf, aber wenn wir n groß genug wählen, können wir die Quinte beliebig dicht approximieren.

(2) Pythagoräischer Lösungsansatz:
Füge so viele Quinten wie möglich hinzu, so daß man Abgeschlossenheit approximieren kann.

§ 5.3 Der Quintenzirkel

Pythagoräischer Ansatz.

Fange mit 1 an und füge nach unten und nach oben Quinten hinzu.

$$1 \xrightarrow{3/2} 3/2 \qquad 1 \xrightarrow{2/3} \frac{4}{3}$$

[eine Quinte nach unten ist das gleiche wie eine Quarte nach oben]

[Intervall zw. dem 8. und 7. Oberton: SEKUNDE]

$$3/2 \xrightarrow{3/2} 9/8 \qquad 3/2 \xrightarrow{2/3} 1$$

$$4/3 \xrightarrow{3/2} 2 \qquad 4/3 \xrightarrow{2/3} 16/9$$

Man beachte, daß man ggf. die Zahlen mit 2 oder 1/2 multiplizieren muß, um im Oktavbereich zu bleiben.

	$({}^3/_2)^k$	$o(({}^3/_2)^k)$	Tonbezeichnung	
Grundton	1	1	C	
Erste Quinte nach oben	${}^3/_2$	${}^3/_2$	G	$3^1/2^1$
Zweite Quinte nach oben	$3^2/2^2$	$3^2/2^3 = {}^9/_8$	D	$3^2/2^3$
Dritte Quinte nach oben	$3^3/2^3$	$3^3/2^4 = {}^{27}/_{16}$	A	$3^3/2^4$
Vierte Quinte nach oben	$3^4/2^4$	$3^4/2^6 = {}^{81}/_{64}$	E	$3^4/2^6$
Fünfte Quinte nach oben	$3^5/2^5$	$3^5/2^7 = {}^{243}/_{128}$	B	$3^5/2^7$
Sechste Quinte nach oben	$3^6/2^6$	$3^6/2^9 = {}^{729}/_{512}$	F♯	$3^6/2^9$

	$({}^3/_2)^k$	$o(({}^3/_2)^k)$	Tonbezeichnung	
Grundton	1	1	C	
Erste Quinte nach unten	${}^2/_3$	$2^2/3^1 = {}^4/_3$	F	$2^2/3^1$
Zweite Quinte nach unten	$2^2/3^2$	$2^4/3^2 = {}^{16}/_9$	B♭	$2^4/3^2$
Dritte Quinte nach unten	$2^3/3^3$	$2^5/3^3 = {}^{32}/_{27}$	E♭	$2^5/3^3$
Vierte Quinte nach unten	$2^4/3^4$	$2^7/3^4 = {}^{128}/_{81}$	A♭	$2^7/3^4$
Fünfte Quinte nach unten	$2^5/3^5$	$2^8/3^5 = {}^{256}/_{243}$	D♭	$2^8/3^5$
Sechste Quinte nach unten	$2^6/3^6$	$2^{10}/3^6 = {}^{1024}/_{729}$	G♭	$2^{10}/3^6$

Bemerkungen ① Nach oben: alles Zahlen $3^k/2^l$.

Nach unten: alles Zahlen $2^k/3^l$.

② Der Abstand zwischen F# (Fis) und Gb (Ges) ist

$$\frac{3^6}{2^9}\cdot\frac{3^6}{2^{10}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}0136$$

Der übliche Abstand zwischen Halbtönen ist ca. 1,06.

D.h. $3^{12}/2^{19}$ ist ungefähr ein Achtelton.

← pythagoräisches Komma