Mathematik & Musik

VI

Sechste Vorlesung
22. März 2024
nachmittags (15^{45})

Erinnerung an VL V

Satz von Dirichlet:

- periodische Funktion haben Fourierreihe
- falls wir konkrete Töne in die Dirichlet-gleichung einsetzen, so erhalten wir sie wieder zurück.

Alle periodischen Funktionen (also nach d'Alembert) alle Klänge sind darstellbar als Fourierreihen mit Sinus & Kosinus.

§4.3 Das Spektrum

Ein Ton f ist eine Sinus-Schwingung mit Frequenz ν, wenn

$$f(t) = \sin(2\pi\nu t).$$

Ein Klang f ist eine $\frac{1}{\nu}$-periodische Fkt.

Wir sagen f hat Grundfrequenz ν

Nach Dirichlet besteht ein Klang aus Tönen, die allesamt Frequenzen der Form

$$\nu \cdot m$$

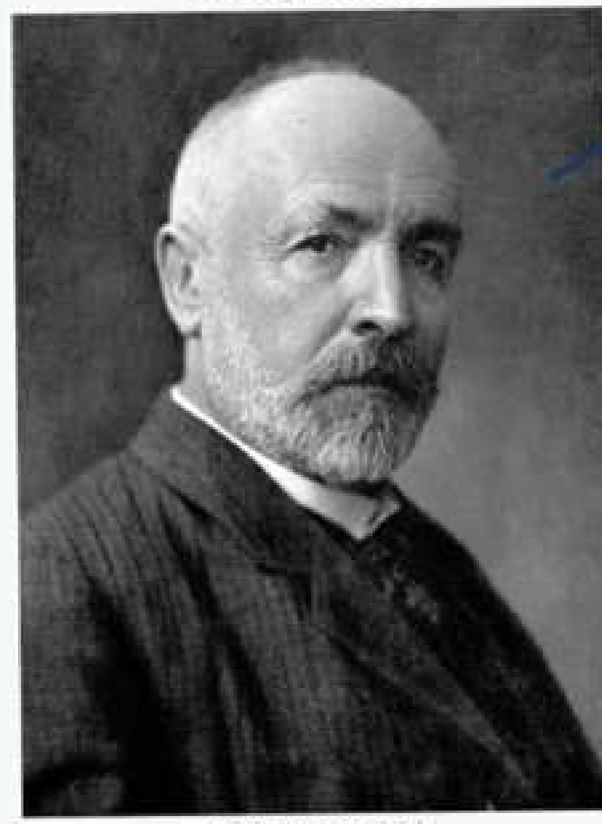
haben, wobei $m \in \mathbb{N}$.

Theorem (Satz von Cantor)

Sei f eine $\frac{1}{\nu}$-periodische Fkt mit Fourierreihenpaar F, d.h. $f(t) = f_F^\nu(t)$ für alle t. Dann ist F eindeutig bestimmt.

Wir nennen F das **Spektrum** oder **Fourierspektrum** von f.

Georg Cantor



Cantor, c.1910

Born	Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor 3 March 1845 Saint Petersburg, Russian Empire
Died	6 January 1918 (aged 72) Halle, Province of Saxony, German Empire

Nebenbemerkung

Können wir zwei Töne immer zu einem Klang zusammenfügen.

A: Nein.

Wir werden sehen, daß eine rationale Frequenz & eine irrationale Frequenz keine Klang (d.h. keine periodische Fkt) ergeben.

Satz Sei $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\sin(x) + \sin(\xi x) = f(x)$$

nicht periodisch.

Beweis Ang. doch: f sei $2p$-periodisch

Dann: $\sin(x) + \sin(\xi x) = \sin(x+2p) + \sin(\xi x + 2p\xi)$

$\Leftrightarrow \quad \sin x - \sin(x+2p) = \sin(\xi x + 2\xi p) - \sin(\xi x)$

ADDITIONS-THEOREM

$$\boxed{2\cos(x+p)\sin(p) = -2\cos(\xi x + \xi p)\sin(\xi p)} \quad (*)$$

Setze in $(*)$ $x := \frac{\pi}{2} - p$ ein.

$$\underbrace{\underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sin(p)}_{0} = -2\cos\left(\xi\frac{\pi}{2}\right)\sin(\xi p)$$

$\Rightarrow$ entweder $\cos(\xi\frac{\pi}{2})$ oder $\sin(\xi p)$ ist Null, aber $\cos(\xi\frac{\pi}{2}) \neq 0$ da $\xi \notin \mathbb{Q}$

Also $\sin(\xi p) = 0$

Also ist $\boxed{\xi p = k\pi}$ für ein k.

Erinnerung an Gleichung (*)

$$2\cos(x+p)\sin(p) = -2\cos(\xi x + \xi p)\sin(\xi p)$$

$$\xi\left(\frac{\pi}{2\xi} - p\right) = \frac{\xi\pi}{2\xi} - \xi p$$

Setze in (*) ein

$$x = \frac{\pi}{2\xi} - p$$

$$\rightsquigarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{2\xi}\right)\sin(p) = \underbrace{-2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sin(\xi p)}_{=0}$$

Also entweder $\cos\left(\frac{\pi}{2\xi}\right) = 0$

oder $\sin(p) = 0$

Da $\xi \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2\xi}\right) \neq 0$, also

$\sin(p) = 0$, also $\boxed{p = l\pi}$

$$\xi = \frac{\xi p}{p} = \frac{k\pi}{l\pi} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}.$$

q.e.d.

Also: Cantor + Dirichlet
gibt die Antwort auf die Frage

Können wir Töne rekonstruieren,
wenn sie gemeinsam auf
unser Ohr treffen?

Ja!

Aber: Es liefert auch (einen Anfang einer) Antwort
auf die pythagoräische Frage:

Warum eigentlich ganzzahlige
Verhältnisse?

Ist f ein Klang der Grundfrequenz ν
(z.B. eine ungerade Funktion), so
besteht das Spektrum aus

$$t \mapsto \sin(2\pi\nu m t) = \varphi_m$$

Vergleiche ich die Frequenzen von φ_m und
φ_n miteinander:

Fr. φ_m Fr. φ_n

νm νn

$$\frac{\nu m}{\nu n} = \frac{m}{n}$$

Wir nennen in dem Fall

Frequenz	Bezeichnung	Alternative Bezeichnung
ν	Grundton	erste Harmonische
2ν	ersten Oberton	zweite Harmonische
3ν	zweiten Oberton	dritte Harmonische
4ν	dritten Oberton	vierte —"—
5ν	vierten Oberton	fünfte —"—
6ν	fünften Oberton	sechste —"—
7ν	sechsten Oberton	siebte —"—

Die Verhältnisse der ersten sind:

$$\frac{2\nu}{\nu} = 2$$ OKTAVE

$$\frac{3\nu}{2\nu} = \frac{3}{2}$$ QUINTE

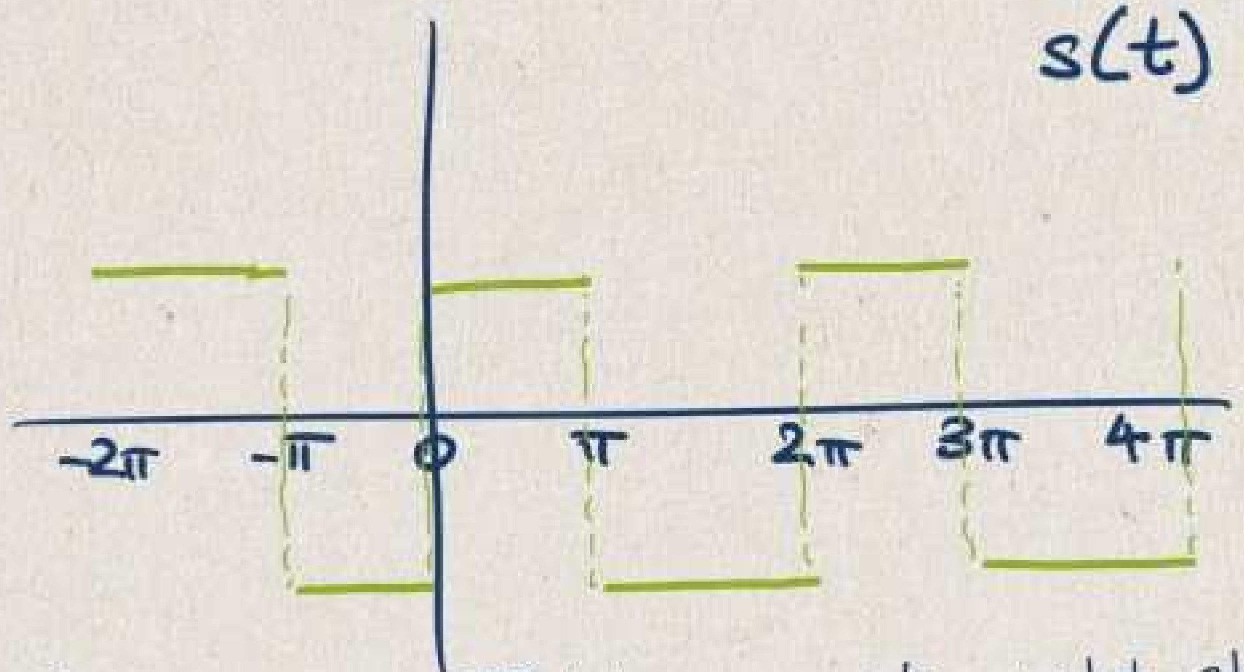
$$\frac{4\nu}{3\nu} = \frac{4}{3}$$ QUARTE

$$\frac{5\nu}{4\nu} = \frac{5}{4}$$ [GROSSE TERZ]

$$\frac{6\nu}{5\nu} = \frac{6}{5}$$ [KLEINE TERZ]

§ 4.4 Die Quadratwelle

Die periodische Fkt., die der Klarinette am ehesten entspricht, ist die Quadratwelle.



Eine unstetige Funktion: also nicht stetig diff'bar.

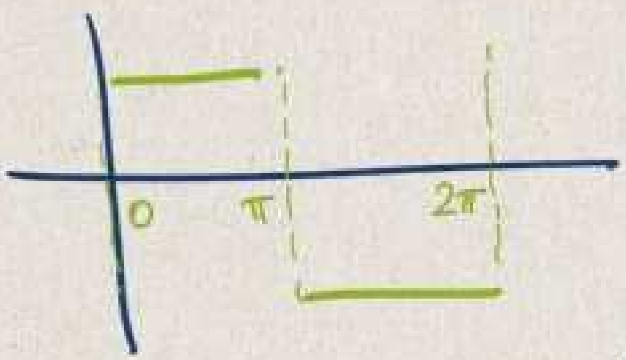
Verallgemeinerung des Satzes von Dirichlet
Falls f $\frac{1}{\gamma}$-periodisch ist und auf dem Intervall $(0, \frac{1}{\gamma})$ stetig diff'bar bis auf endlich viele Ausnahmen, so gilt der Satz von Dirichlet weiter.

Somit: die Quadratwelle hat eine Fourierreihe; da sie eine ungerade Fkt. ist, gilt
$a_n = 0$ für alle n.
Rechnen wir also die b_n's aus.

Die Quadratwelle hat Periode $L = 2\pi$, somit Frequenz $\nu = \frac{1}{2\pi}$. Also $2\nu = \frac{1}{\pi}$.

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m\vartheta) \cdot s(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(m\vartheta) \cdot 1\, d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(m\vartheta)(-1)\, d\vartheta \right)$$



$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(m\vartheta)\, d\vartheta - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(m\vartheta)\, d\vartheta \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{m} \cos(m\vartheta) \right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{m} \cos(m\vartheta) \right]_{\pi}^{2\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(2\left(-\frac{1}{m} \cos(m\pi)\right) - \left(-\frac{1}{m} \cos(0)\right) - \left(-\frac{1}{m} \cos(2m\pi)\right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{m} \cos m\pi\right) + \frac{2}{m} \right)$$

$$= \frac{2}{m\pi} \left(1 - \cos(m\pi) \right)$$

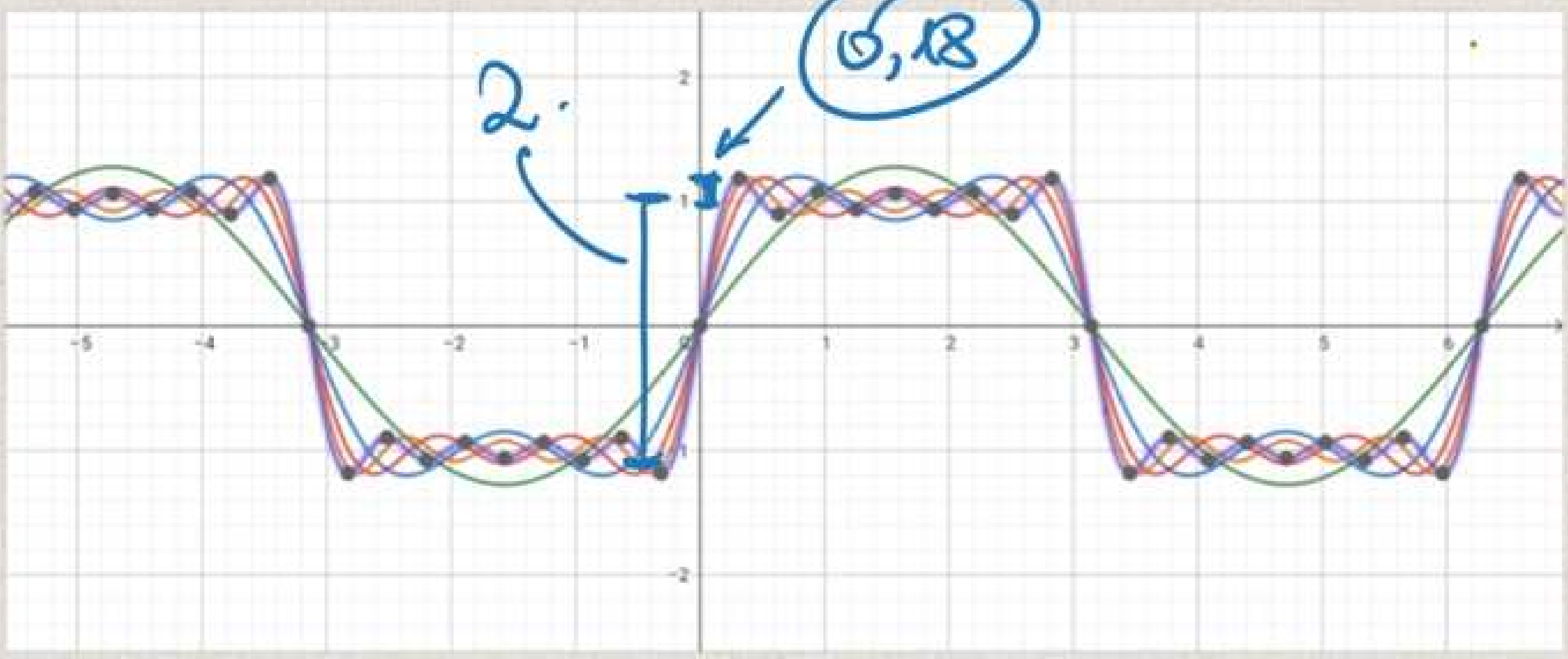
$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \frac{4}{m\pi} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$s(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7t) + \frac{4}{9\pi}\sin(9t) + \dots$$

Stellen empirisch fest, daß dies gegen $s(t)$ konvergiert.

Dicht bei der Unstetigkeitsstelle findet sich immer ein Punkt, an dem der Wert substantiell von 1 oder -1 nach oben oder unten abweicht.

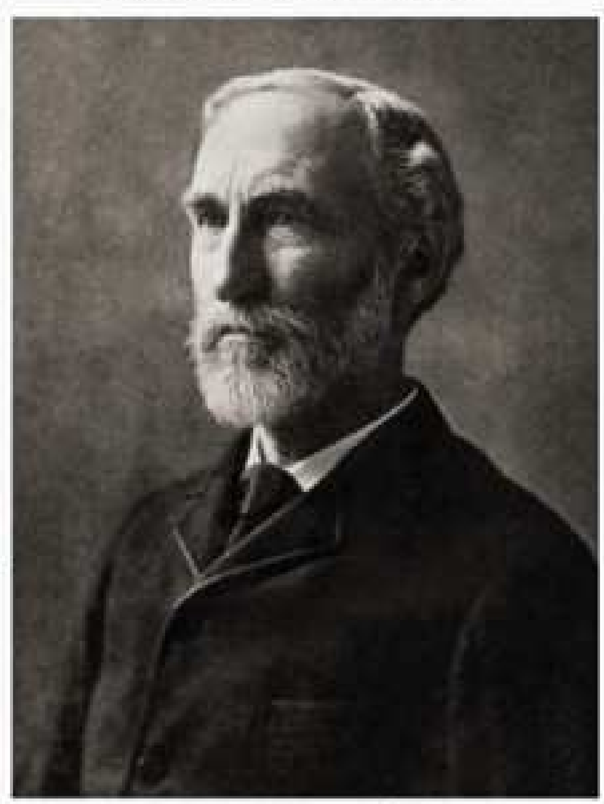
§4.5 Das Gibbs-Phänomen



Gibbs. Approximiert man eine unstetige periodische Fkt durch eine Fourierreihe, so kommt es bei endlichen Approx. an den Unstetigkeitsstellen zu einer Überschwingung.

Ca. 8,9% der Höhe der Unstetigkeit.

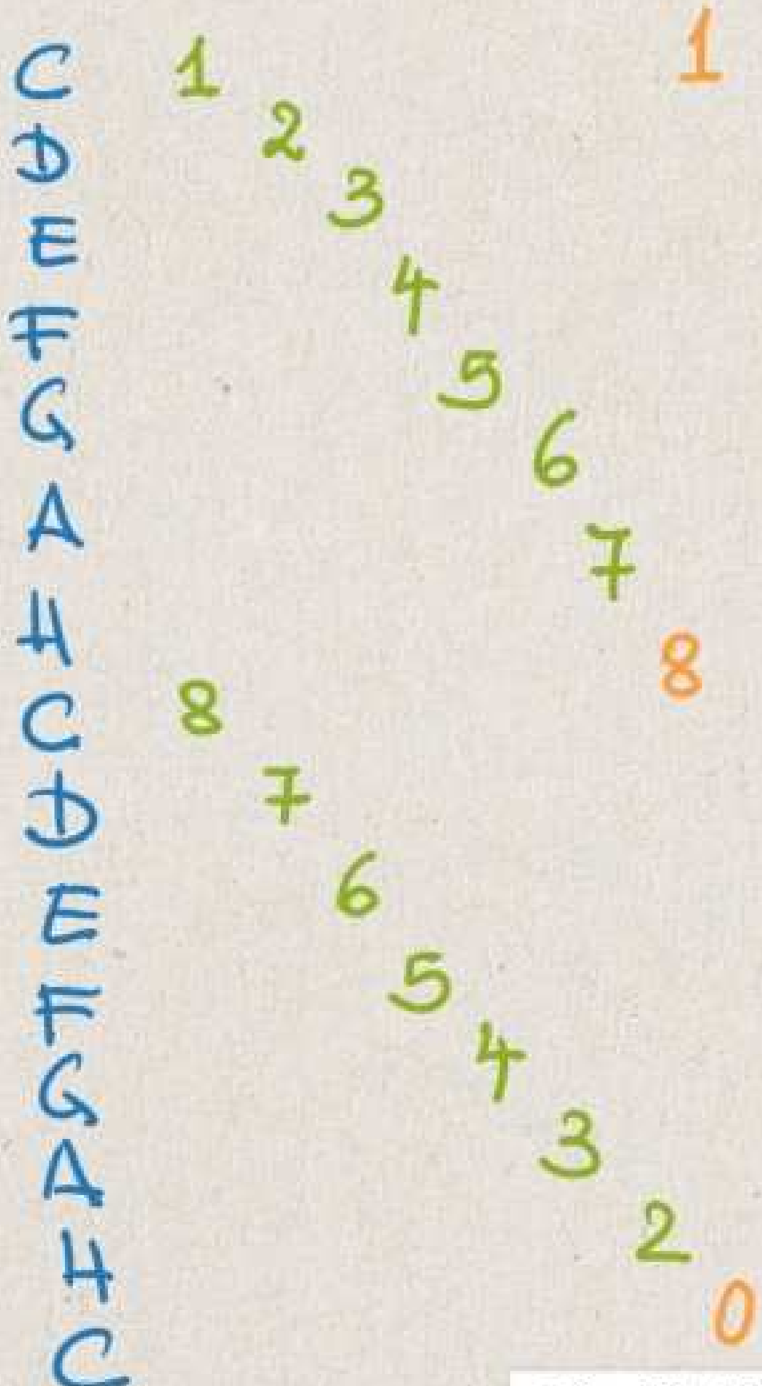
Josiah Willard Gibbs



Josiah Willard Gibbs

Born	February 11, 1839 New Haven, Connecticut, U.S.
Died	April 28, 1903 (aged 64) New Haven, Connecticut, U.S.
Nationality	American

§ 4.6 Die Shepard-Tonleiter



Roger Shepard

Shepard at the ASU SciAPP conference in March 2019

Born	Roger Newland Shepard January 30, 1929 Palo Alto, California, U.S.
Died	May 30, 2022 (aged 93) Tucson, Arizona, U.S.
Occupation	cognitive scientist
Notable work	Shepard elephant, Shepard tones

5.6 Die Shepard-Tonleiter

In der Praxis hören wir praktisch nie Töne, sondern immer nur Klänge: jeder in der Natur auftretende Klang hat immer zumindest einige Anteile seiner Harmonischen im Spektrum. Dies veranlaßte den amerikanischen Kognitionswissenschaftler Roger Shepard (1929–2022), eine auditive Illusion zu schaffen, die sogenannte *Shepard-Tonleiter*.[8]

Wir fangen mit einem Klang an, dessen Grundton sehr leise und erster Oberton sehr laut ist. Dieser Klang wird als der Oberton wahrgenommen. Wir schreiten in der Tonleiter voran, indem wir jeweils den Grundton etwas in der Amplitude erhöhen und den Oberton etwas verringern. Da beide Töne, aus denen der Klang besteht, in jedem Einzelschritt leicht in der Frequenz ansteigen, empfinden wir diese Folge als eine ansteigende Tonleiter.

Nach sieben Tönen ist allerdings nun der Grundton laut und der Oberton leise, so daß wir beim achten Ton unmerklich zum ursprünglichen ersten Ton wechseln können. Das Ohr nimmt hauptsächlich den Anstieg vom siebten Grundton auf den ersten Oberton wahr und überhört die Tatsache, daß wir den Oberton verlieren und stattdessen wieder einen neuen Grundton hinzufügen; siehe Abb. 7.