Mathematik & Musik

V

Fünfte Vorlesung
22. März 2024
Nachmittags (14 Uhr)

Erinnerung an VL IV

Der d'Alembert'sche Trick hatte uns erlaubt zu sehen, daß Lösungen der Wellengleichung stets periodisch sind.

I–III Ziele:

Erklärung des pythagoräischen Prinzips.

Erklärung wie wir Töne aus einer Superposition rückreduzieren können.

Joseph Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier

Born	21 March 1768 Auxerre, Burgundy, Kingdom of France (now in Yonne, France)
Died	16 May 1830 (aged 62) Paris, Kingdom of France
Nationality	French

KAPITEL 4 Fourieranalyse

§4.1 Fourierfolgen und Fourierreihen

<u>Idee</u> Trigonometrische Reihen.

Sei ν eine Frequenz und betrachten die Funktionen

$$t \longmapsto \sin(2\pi\nu m t) \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$t \longmapsto \cos(2\pi\nu m t) \qquad m \in \mathbb{N}$$

<u>Fouriers Idee</u> Falls f $\frac{1}{\nu}$-periodisch ist, so wollen wir f als Kombination von Funktionen wie oben mit geeigneten Koeffizienten auffassen.

<u>Definition</u> Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Folgen reeller Zahlen und $F = (\vec{a}, \vec{b})$. Definiere

$$f_F^{\nu}(t) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi\nu m t) + b_m \sin(2\pi\nu m t)$$

<u>ACHTUNG</u>. Ohne Zusatzannahmen muß diese Reihe nicht konvergieren!

Bemerkung

Falls $f_P^{\nu}(t)$ für alle t konvergiert

so gilt $f_P^{\nu'}(t)$ konvergiert ebenfalls

für alle t:

$$\cos(2\pi m \nu' t) = \cos(2\pi m \nu \underbrace{\tfrac{\nu'}{\nu} t})$$

D.h. die Konvergenz an der Stelle $\frac{\nu'}{\nu} t$ der ersten Reihe gibt uns die Konv. der zweiten Reihe an der Stelle t.

Aber Im allgemeinen gilt

$$f_F^{\nu}(t) \neq f_F^{\nu'}(t) \quad \text{falls } \nu \neq \nu'.$$

Definition F heißt Fourierfolgenpaar falls für ein ν (und damit für alle ν) gilt

$f_F^{\nu}(t)$ konvergiert

für alle t.

Beispiele für Konvergenz & Nichtkonvergenz:

(1)
$$F = (\vec{a}, \vec{b})$$
$$\vec{a} = (0, 1, 0, 0 \ldots)$$
$$\vec{b} = (0, 0, 0, 0, \ldots)$$

$$f_F^\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi\nu m t) + b_m \sin(2\pi\nu m t)$$
$$= 1 \cdot \cos(2\pi\nu t).$$

Klar: dieses Paar von Folgen ist ein Fourierfolgenpaar.

[Nebenbemerkung: Das Bsp. zeigt schön, wie $f_F^\nu \neq f_F^{\nu'}$ für $\nu \neq \nu'$.]

(2)
$$F = (\vec{a}, \vec{b})$$
$$\vec{a} = (1, 1, 1, \ldots)$$
$$\vec{b} = (1, 1, 1, \ldots)$$

$$f_F^\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi\nu m t) + b_m \sin(2\pi\nu m t)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2\pi\nu m t) + \sin(2\pi\nu m t)$$

$$t=0 \rightsquigarrow f_F^\nu(0) = \sum_{m=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

§ 4.2 Der Satz von Dirichlet

Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Born	Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 13 February 1805 Düren, French Empire
Died	5 May 1859 (aged 54) Göttingen, Kingdom of Hanover
Nationality	German

<u>Theorem</u> SATZ VON DIRICHLET

Sei f eine $\frac{1}{\nu}$-periodische stetig diff'bare Funktion.
Dann ex. ein Fourierfolgenpaar $F = (\vec{a}, \vec{b})$, so daß

$$f = f_F^{\nu}.$$

Diese Koeffizienten a_n & b_n können explizit berechnet werden: $L = \frac{1}{\nu}$

$$a_0 = \nu \int_0^L f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$a_n = 2\nu \int_0^L \cos(2\pi n \nu \vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$b_n = 2\nu \int_0^L \sin(2\pi n \nu \vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

Gerade und ungerade Funktionen.

Falls die Voraussetzungen des Satzes von Dirichlet erfüllt und gerade ist, so sind alle $b_m = 0$ = KOSINUS-FOURIERFOLGE;

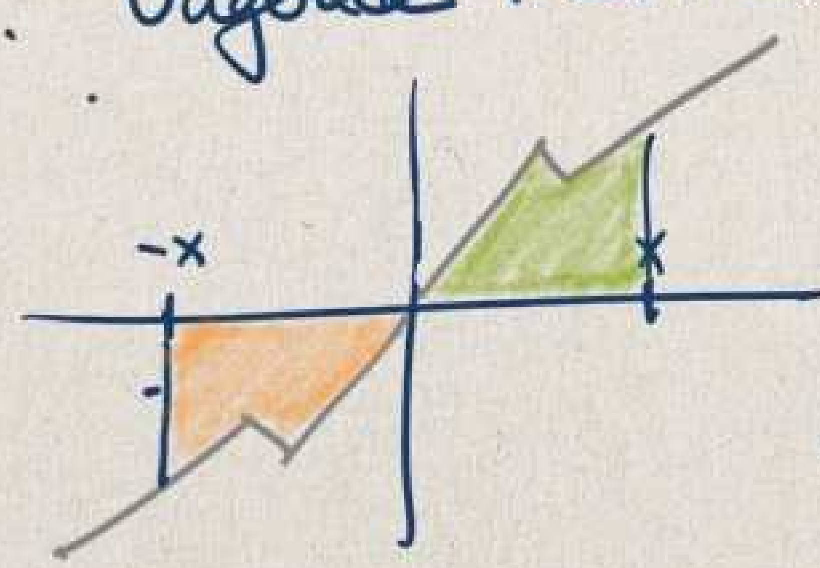
Falls f eine solche Fkt ungerade ist, so sind alle $a_m = 0$ = SINUS-FOURIERFOLGE.

Dazu müssen wir uns ansehen, wie gerade und ungerade Fkt. und Integrale wechselwirken.

1. Falls f gerade und g ungerade, so ist
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ ungerade.}$$
$$[(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -(f \cdot g)(x)]$$

2. Daraus folgt, falls f gerade ist, daß
$$\sin(2\pi \nu m \vartheta) \cdot f(\vartheta)$$
ungerade ist.

3. Ungerade Fkt. & Integrale



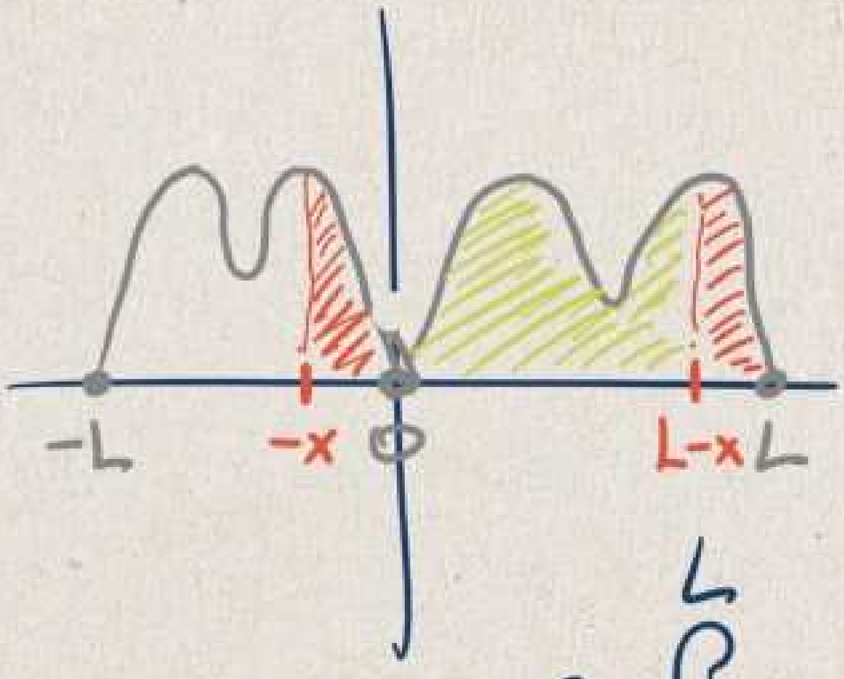
Falls h ungerade ist, gilt $\int_{-x}^{x} h(\vartheta)\, d\vartheta = 0$ für alle x.

Wir versuchen zu zeigen

$$0 = b_m = 2\nu \int_0^L \sin(2\pi\nu m\vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

leider nicht symmetrisch um den Nullpunkt.

4. Falls h periodisch mit Periode L



$$\int_0^L h(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{-x}^{L-x} h(\vartheta)\, d\vartheta$$

Damit $b_m = 2\nu \int_0^L \sin(2\pi\nu m\vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta$

$$\overset{4.}{=} 2\nu \int_{-L/2}^{L/2} \sin(2\pi\nu m\vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\overset{3.}{=} 0.$$

Bem. Ist f eine endliche Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen, also

z.B.

(*) $$f(t) = \lambda_1 \cos(2\pi\nu m_1 t) + \ldots + \lambda_k \cos(2\pi\nu m_k t) + \mu_1 \sin(2\pi\nu n_1 t) + \ldots + \mu_\ell \sin(2\pi\nu n_\ell t)$$

und ich berechne nach dem Satz von Dirichlet die Fourierfolge von f, so ist sie exakt

$$\boxed{\begin{aligned} a_{m_i} &= \lambda_i \\ b_{n_i} &= \mu_i \end{aligned}}$$

und alle anderen sind Null.

Dies liefert eine Antwort auf die Frage, ob wir aus der Summe auf die Komponenten der Summe Rückschlüsse machen können.

Statt (*) betrachte

$$f(t) = \sin(2\pi\nu t)$$

Ziel Berechne a_n, b_m nach Dirichlet und ermittle, daß $b_1 = 1$ und $a_i = 0 \ \forall i \quad b_i = 0 \ \forall i \neq 1$.

Wie zuvor gezeigt, da $\sin(2\pi\nu t)$ ungerade ist, sind alle Kosinusterme a_m gleich Null.

Wir müssen nur

$$b_m = 2\nu \int_0^L \sin(2\pi\nu m \vartheta)\, \sin(2\pi\nu\vartheta)\, d\vartheta$$

1

berechnen.

$$\int \sin ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \sin ax \sin bx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a \neq b$$

D.h. $m = 1$

$a = 2\pi\nu$

$$b_m = 2\nu\left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{8\pi\nu}\sin(4\pi\nu\vartheta)\right]_0^L$$

$$= 2\nu\left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}0\right) = \nu L = 1.$$

$m \neq 1$

$a = 2\pi\nu m \quad b = 2\pi\nu$

$$b_m = 2\nu\left[\frac{\sin(2\pi(m-1)\nu\vartheta)}{4\pi(m-1)\nu} - \frac{\sin(2\pi(m+1)\nu\vartheta)}{4\pi(m+1)\nu}\right]_0^L$$

$$= 0.$$

Für spätere Berechnungen listen wir einige Integralformeln auf, die man in herkömmlichen Formelkompendien (wie z.B. das *Taschenbuch der Mathematik* von Bronstein und Semendjajev) nachschlagen kann (für $a, b \geq 0$)

$$\int \sin ax \sin ax \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4a}\sin 2ax, \tag{12}$$

$$\int \sin ax \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad \text{(falls } a \neq b\text{)}, \tag{13}$$

$$\int \cos ax \cos ax \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4a}\sin 2ax, \tag{14}$$

$$\int \cos ax \cos bx \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad \text{(falls } a \neq b\text{) und} \tag{15}$$

$$\int \sin ax \cos ax \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2a}\sin^2 ax. \tag{16}$$