

# MATHEMATIK & MUSIK



NEUNTE & LETZTE VORLESUNG  
Dienstag, 2. April 2024  
16<sup>15</sup> - 1800

## KAPITEL 6: STIMMUNGEN

**Definition 40.** Wir definieren sieben *Grundbezeichnungen* und verwenden das Symbol  $X$  als Variable für Grundbezeichnungen. Jeder der sieben Grundbezeichnungen  $X$  weisen wir sowohl eine *Grundposition*  $gp(X)$  als auch eine *Feinposition*  $fp(X)$  zu und ordnen sie zyklisch an:

$X$	C	<	D	<	E	<	F	<	G	<	A	<	B	<	C
$gp(X)$	0		1		2		3		4		5		6		
$fp(X)$	0		2		4		5		7		9		11		

durch

$$d_g(X, Y) := gp(Y) - gp(X) \pmod{7}$$

$$d_f(X, Y) := fp(Y) - fp(X) \pmod{12}$$

Tonbezeichnungen:  $X\# \dots \#$  oder  $Xb \dots b$ .

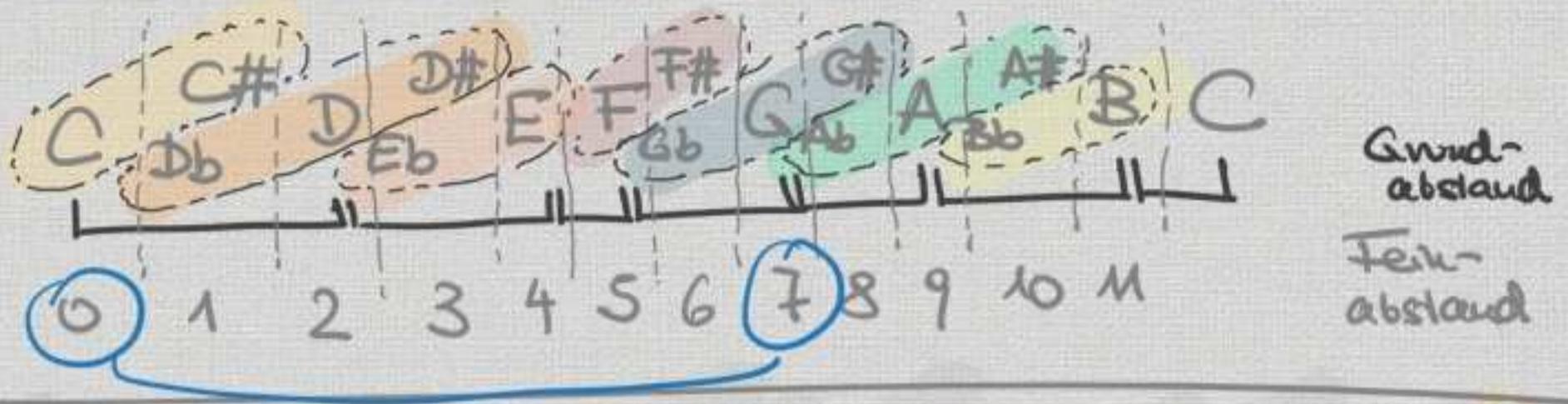
Wir definieren die Grundabstandsfunktion  $d_g$  auf allen Tonbezeichnungen, indem wir die  $\sharp$ - und  $b$ -Symbole ignorieren: falls  $X'$  eine Tonbezeichnung mit Grundbezeichnung  $X$  und  $Y'$  eine Tonbezeichnung mit Grundtonbezeichnung  $Y$  ist, so setzen wir

$$d_g(X', Y') := d_g(X, Y).$$

Z.B.  $d_g(D\sharp\sharp, Gb) = d_g(D, G) = 2$ .

Wir setzen nun die Feinabstandsfunktion  $d_f$  durch Rekursion nach der Länge der Folge von zusätzlichen Symbolen auf alle Tonbezeichnungen fort: sind  $X$  und  $Y$  Tonbezeichnungen, so daß  $d_f(X, Y)$  bereits definiert ist, so ist

$$\begin{aligned}d_f(Xb, Y) &= d_f(X, Y\sharp) := d_f(X, Y) + 1, \\d_f(X\sharp, Y) &= d_f(X, Yb) := d_f(X, Y) - 1, \\d_f(X\sharp, Y\sharp) &= d_f(Xb, Yb) := d_f(X, Y), \\d_f(X\sharp, Yb) &:= d_f(X, Y) - 2 \text{ und} \\d_f(Xb, Y\sharp) &:= d_f(X, Y) + 2.\end{aligned}$$



Eine Stimmung oder eine Tonleiter ist eine Funktion  $T$ , welche Tonbezeichnungen eine Zahl  $T(X) \in [1, 2)$  zuordnet.

### Zwei Beispiele

- ① Die gleichstufige Stimmung -  

$$T(X) = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n \quad \text{falls } d_f(X) = n$$
- ② Die pythagoräische Stimmung -

Die Quintenspirale gibt uns nun die *pythagoräische Tonleiter*:

- (i) Die Tonbezeichnung C erhält den Wert 1.
- (ii) Ist X eine Tonbezeichnung, in der keine b-Symbole auftauchen und T(X) ist bereits definiert. Sei Y die Dominante von X. Dann definiere  $T(Y) := o^{3/2} \cdot x$ .
- (iii) Ist X eine Tonbezeichnung, in der keine #-Symbole auftauchen und T(X) ist bereits definiert. Sei Y die Dominante von X. Dann definiere  $T(Y) := o^{3/2} \cdot x$ .

Ist X eine Tonbezeichnung, in der keine #-Symbole auftauchen und X bereits eine Zahl  $x$  zugewiesen, finde eine Tonbezeichnung Y, so dass die Grundbezeichnung von Y genau vier Grundtöne unter der Grundbezeichnung von X liegt (also z.B. G, wenn D die in X auftauchende Grundbezeichnung ist) und  $d(Y, X) = 7$ , wobei wir Y durch b-Symbole erniedrigen; weise dann die Zahl  $o^{2/3} \cdot x$  der Tonbezeichnung Y zu.

Diese rekursive Definition weist allen Tonbezeichnungen einen Wert zu; wir stellen fest, daß diese Stimmung genau die Bestimmung der Zahlenwerte (und Tonbezeichnungen) in der Quintenspirale ist.

# § 6.1 (aus VL VIII) TERZEN

Da alle Zyklen in der pythagoräischen Stimmung von der Terz

sind, taucht KEINE Terz auf.

$$2^z = 3^{z'}$$

für  $z, z' \in \mathbb{Z}$

Große reine Terz:  $5/4$   
Kleine reine Terz:  $6/5$

VL VIII, Seite 13.

Pythagoräisches Komma

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} =: p$$

Syntonisches Komma

$$\frac{3^4}{2^{45}} =: s$$

$$p \approx s$$

Der Unterschied zwischen  $p$  und  $s$ :

## § 6.1 Terzen

Die pythagoräische Stimmung hat überhaupt keine Terzen.

Pythagoräisch

C : E : G

C: 1  
E:  $81/64$   
G:  $3/2$

$$\left( \frac{5}{4} + \frac{81}{64} \right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{81} = \frac{32}{27} \neq \frac{6}{5}$$

Abstand zwischen großer Terz und pythagoräischem E:

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80} = 1,0125$$

vgl.  $p = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,0136$

Diese Zahl ist ungefähr so groß wie ein pythagoräisches Komma, aber nicht ganz.

Nennen sie das **SYNTONISCHE KOMMA**

$$\frac{3^8 \cdot 5}{2^{15}} =$$

als **Schisma** bezeichnet.

# Schnittstelle zwischen Natur & Kultur:

1. Besondere Stellung der Oktave  
folgt aus Mathematik & Physik.
2. Besondere Stellung der Harmonischen  
(in absteigender Bedeutung)  
folgt aus Mathematik & Physik.
3. Zwölftteilung der Oktave  
ist natürlich als Wohl auf der  
Grundlage der Mathematik, aber  
nicht notwendig.
4. Irgendwann muß man aufhören,  
die Harmonischen zu berücksichtigen.  
Wann? Pythagoras → Quarte  $\frac{4}{3}$ .

Wir erinnern  
uns an die  
pythagoräische  
Zählweise & die  
τετρακτύς.

Dies ist eine willkürliche  
Entscheidung.

Im späten Mittelalter:  
auch  $\frac{5}{4}$  und  $\frac{6}{5}$  sollten  
vertreten sein.

Auch dies ist eine ausschließende Entscheidung:  
 $\frac{7}{6}$  und  $\frac{8}{7}$  werden nicht berücksichtigt.

# Geschichte der Stimmung

erstmals

14. Jahrhundert: Quarte als harmonisches Intervall.

Walter Odington  
(13./14. Jhd.)

→ Reine Stimmung.

15. Jahrhundert

Hintergrund: Polyphone Musik des Spätmittelalters.

→ Mitteltönige Stimmungen

16. Jahrhundert

Prätoriausche Stimmungen

Die mitteltönigen Stimmungen waren weit verbreitet.

Lokal kohärent

1729 waren alle Hamburger Orgeln mitteltönig gestimmt.

Z.B. die Ap-Schweitzer-Orgel in St. Jacobi (1693)

1993 restauriert in 1/5-Komma-mitteltöniger Stimmung.

Michael Praetorius



<b>Born</b>	28 September 1571 (most likely) Creuzburg
<b>Died</b>	15 February 1621 (aged 49) Wolfenbüttel
<b>Occupations</b>	Composer · organist · music theorist

## § 6.2 Dreiklänge

Def. Ein Tripel von Tonbezeichnungen

$$X:Y:Z$$

heißt Dur-Dreiklangsbezeichnung falls

$$d_g(X,Y) = 2 \quad \& \quad d_g(Y,Z) = 2$$

$$d_f(X,Y) = 4 \quad \& \quad d_f(Y,Z) = 3$$

Moll-Dreiklangsbezeichnung falls

$$d_g(X,Y) = 2 = d_g(Y,Z)$$

$$d_f(X,Y) = 3 \quad \& \quad d_f(Y,Z) = 4.$$

Def. Ein Tripel  $(x,y,z)$  von Zahlen heißt

reines Dur-Dreiklang

falls  $y = \frac{5}{4}x$

&  $z = \frac{6}{5}y$

reines Moll-Dreiklang falls  $y = \frac{6}{5}x$  &

$z = \frac{5}{4}y.$

Def.

Eine Stimmung  $T$  ist reih für X-Dur

falls für die Dur-Dreiklangsbezeichnung  $X:Y:Z$  gilt, daß  $(T(X), T(Y), T(Z))$  ein reines Dur-Dreiklang ist.

[Ebenso für Moll.]

Bem. Ist  $T$  die pythagoräische Stimmung (oder die gleichstufige Stimmung), so ist  $T$  nicht rein für X-Dur oder X-Moll für alle  $X$ .

Für die pythagoräische Stimmung, weil keine 5 auftritt; für die gleichstufige, weil alle Zahlen irrational sind.

Um also eine Stimmung rein für C-Dur zu machen, müssten wir

pythag.

C	D	E	F	G
1	$\frac{9}{8}$	<del><math>\frac{81}{64}</math></del>	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
		$\frac{5}{4}$		

$E = \frac{81}{64}$  durch  $E = \frac{5}{4}$  ersetzen, also um eine pythagoräische Komma verringern.

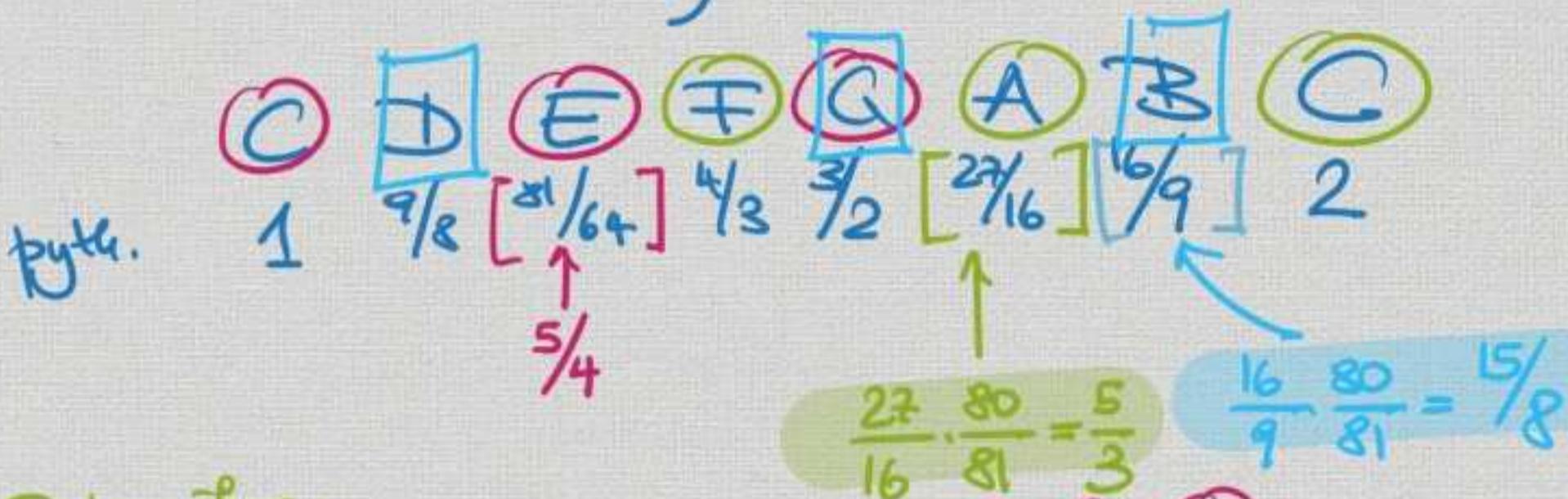
Reduzierungsüberprüfung:

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{80}{81} = \frac{80}{64} = \frac{40}{32} = \frac{20}{16} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

✓

# § 6.3 Die reine Stimmung

Die reine Stimmung soll  $\text{C-Dur}$  rein machen, aber auch die **Subdominante** und **dominante**  
 Tonart:  $\text{F-Dur}$ ;  $\text{G-Dur}$ .



Rechenprüfung:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

C-Dur:  $\text{C}$   $\text{E}$   $\text{G}$

F-Dur:  $\text{F}$   $\text{A}$   $\text{C}$

G-Dur:  $\text{G}$   $\text{B}$   $\text{D}$

Rechenprüfung:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

**REIN**  $1$   $\frac{9}{8}$   $\frac{5}{4}$   $\frac{4}{3}$   $\frac{3}{2}$   $\frac{5}{3}$   $\frac{15}{8}$   $2$ .

Ebenso für  $\text{Eb}$ ,  $\text{Ab}$ ,  $\text{Bb}$  für die Molldreiklänge.

Aber: Wir haben notwendigerweise durch das Umstimmen **Quarten** zerstört.

z.B. D-A.

C	D	E	F	G	A	<del>B</del>	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Wir könnten die Terz D: F# rein stimmen,  
indem wir F# setzen als:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{45}{32}$$

Aber die Quinte D: A:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} \neq \frac{3}{2}$$

ist unwiederbringlich verloren.

Ändere ich das D ist G-Dur kühler,  
ändere ich das A ist F-Dur kühler.

Konsequenz →

Keine Stimmungen sind  
immer reiner für eine (oder  
mehrere) Tonart(en) und weniger  
für andere.

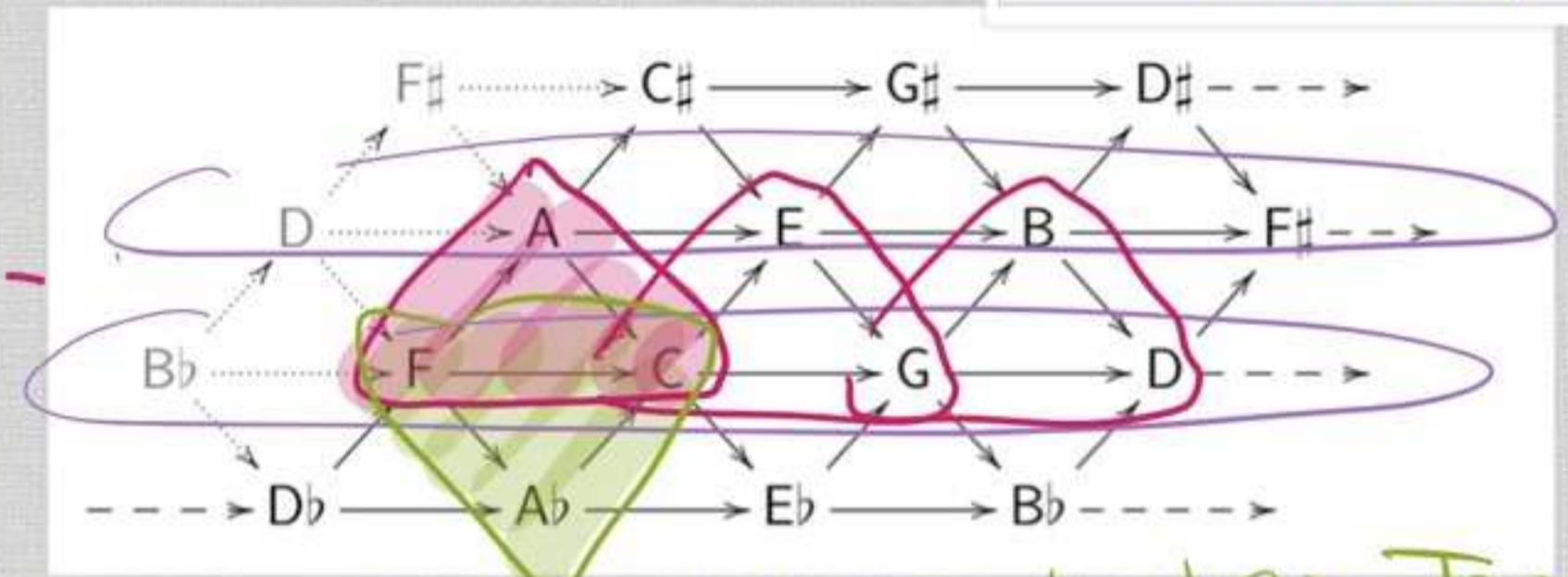
# § 6.4 Die Eitz-Notation

Legen Sie Kopien der aufgewickelten Quintenspirale vier  $4\frac{1}{2}$  Positionen versetzt übereinander.

Dann ist der Ton, der der Terz entspricht schräg oberhalb der Terz, die Grundton und Quinte entsprechen.



Carl Eitz. 1848-1924



Genauso: nach unten hat man die kleine Terz.



Dur-Dreiklänge



Moll-Dreiklänge

Das Grunddiagramm beschreibt die  
 pythagoreische Stimmung. Abweichungen  
 werden durch Supersekt angeordnet:

$X^0 \longrightarrow X$  ist pythagoreisch gestimmt

z.B.  
 $G^{+1}$

$X^{+a} \longrightarrow X$  ist um  $a$  syntonische Kommas erhöht

$$[T(X) = T_{\text{Pyth}}(X) \cdot s^a]$$

z.B.  
 $A^{-1}$

$X^{-a} \longrightarrow X$  ist um  $a$  syntonische Kommas vermindert

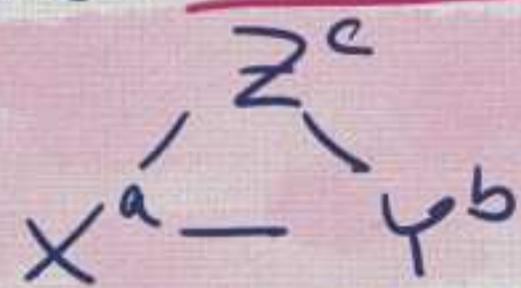
$$[T(X) = T_{\text{Pyth}}(X) \cdot s^{-a}]$$

Genau  $X^{+ap} \longrightarrow X$  ist um  $a$  pythagoreische Kommas erhöht

$X^{-ap} \longrightarrow \dots$  vermindert.

Dann ist ein Dur-Dreiklang rein

gdw.

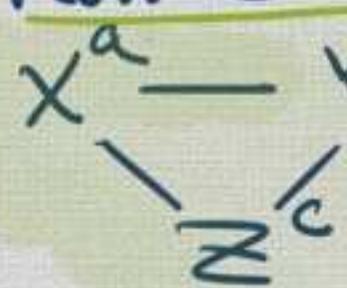


$$a = b$$

$$c = a - 1$$

ein Moll-Dreiklang rein

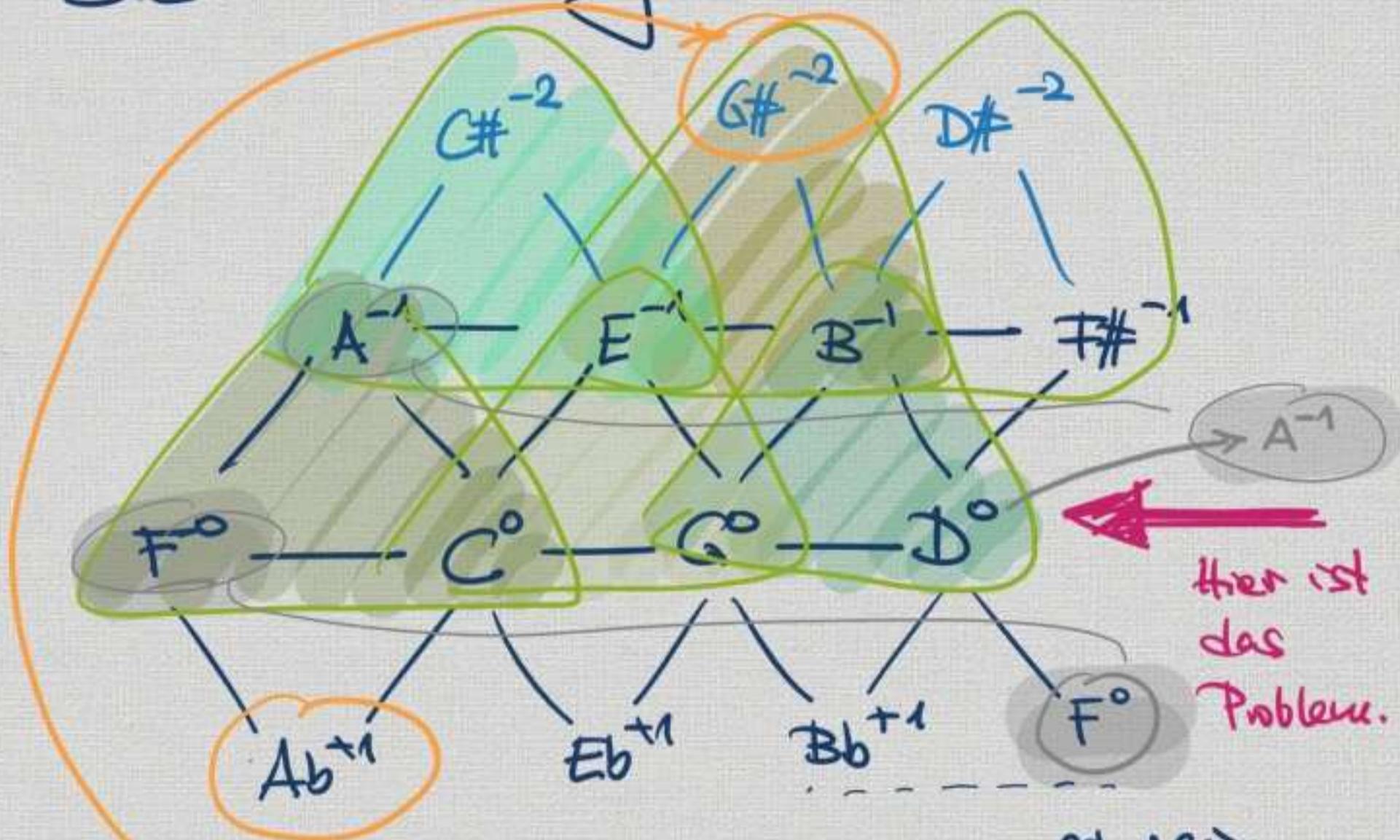
gdw



$$a = b$$

$$c = a + 1$$

Die reine Stimmung in Eitz-Notation



Bb-Dur und reine

Bemerkung Eukromie von Ab und G#  
 ist jetzt  $S^3 p^{-1}$ , also drei  
 syntonische Kommas minus ein  
 pythagorisches Komma.

D.h. wir haben den eukromischen  
 Fehler verdoppelt!

## § 6.5 Mittelhörige Stimmungen

Idee:

In der reinen Stimmung wird jeweils eine Tonart geoffert, die den Sprung um ein synchratisches Komma tragen muß: in unserem Fall D-Dur.

Verteile diesen Fehler gleichmäßig auf die vier Schritte.

Insbesondere: wir opfern die Reinheit der Quarten für die Terzen.

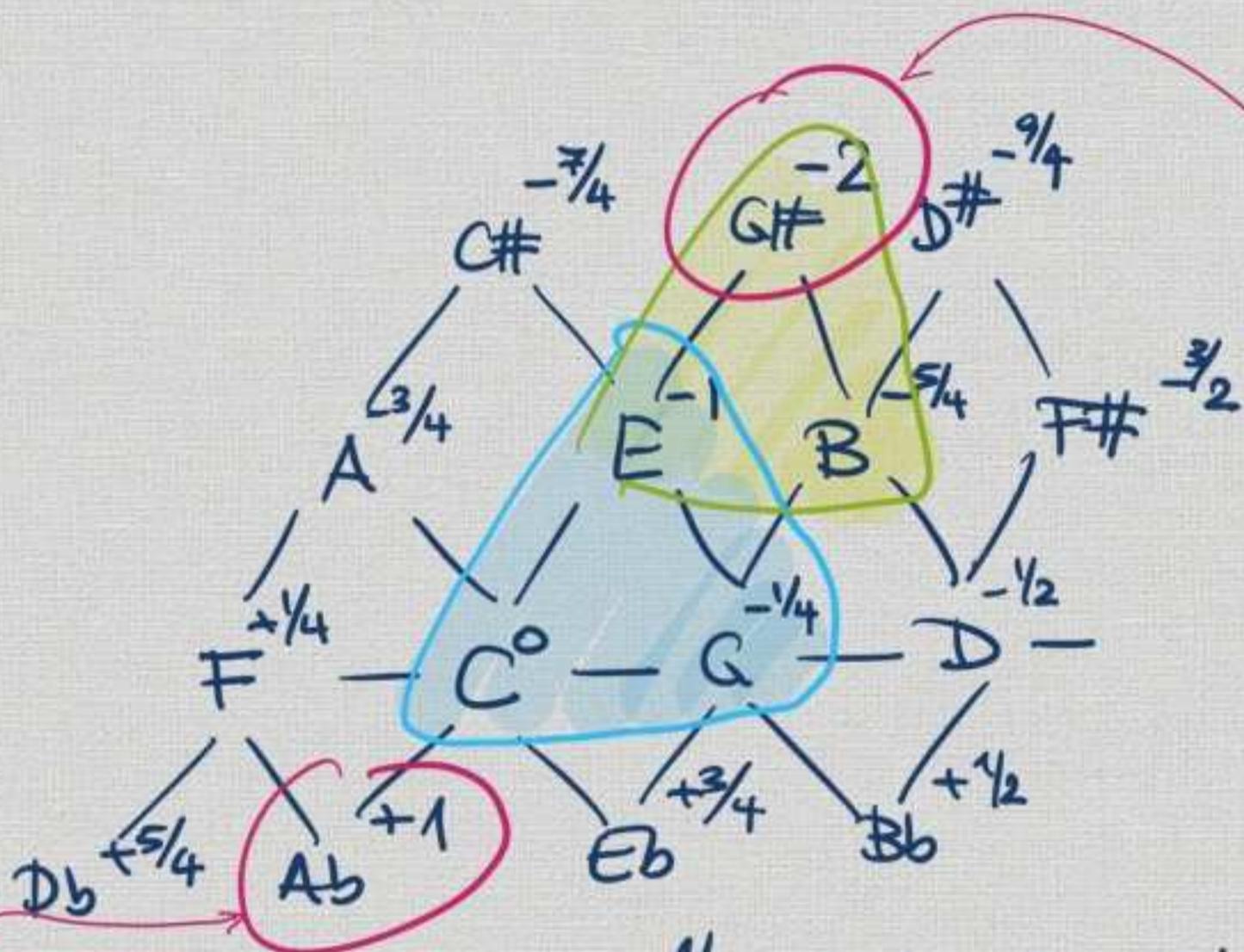
Unser Beispiel:

Viertelkomma-mittelhörige  
Stimmung

Was ist ein Viertel synchratisches Komma?

$$\sqrt[4]{S} = \sqrt[4]{\frac{81}{80}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}} = \frac{3}{2 \sqrt[4]{5}} \notin \mathbb{Q}.$$

Bemerkung, daß dies keine rationale Zahl ist.



z.B.  $C^\circ : E^{-1} : G^{-1/4}$  hat eine reine große Terz und eine ganz leicht verstrichene Quarte.

Bem. 1. Alle Dreiklänge sind gleich — reine große Terz und um Viertelkomma verstrichene Quarte.

2. Der enharmonische Fehler ist exakt wie bei der reinen Stimmung:  $S^3 P^{-1}$ , also etwa doppelt so viel wie in der pythag. Stimmung.

Praktisches Problem:

Tasteneinstrumente, die nur eine Taste für elektronische identifizierter Töne haben:

F# / Gb

Ich muß mich entscheiden, ob ich die Taste als F# oder als Gb stricke. Je nachdem, wird die andere Tonart falsch klingen.

C# / Db — gestimmt als C#  
Unser Db ist also ein  $C\#^{-7/4} = Db^{-7/4+1p}$

$Db^{-7/4+1p}$  :  $F^{+1/4}$  :  $Ab^{+1}$  Db-Dur

Dann ist die Terz um  $s^3 p^{-1}$  verschieben  
und die Quinte um  $s^{4/4} p^{-1}$

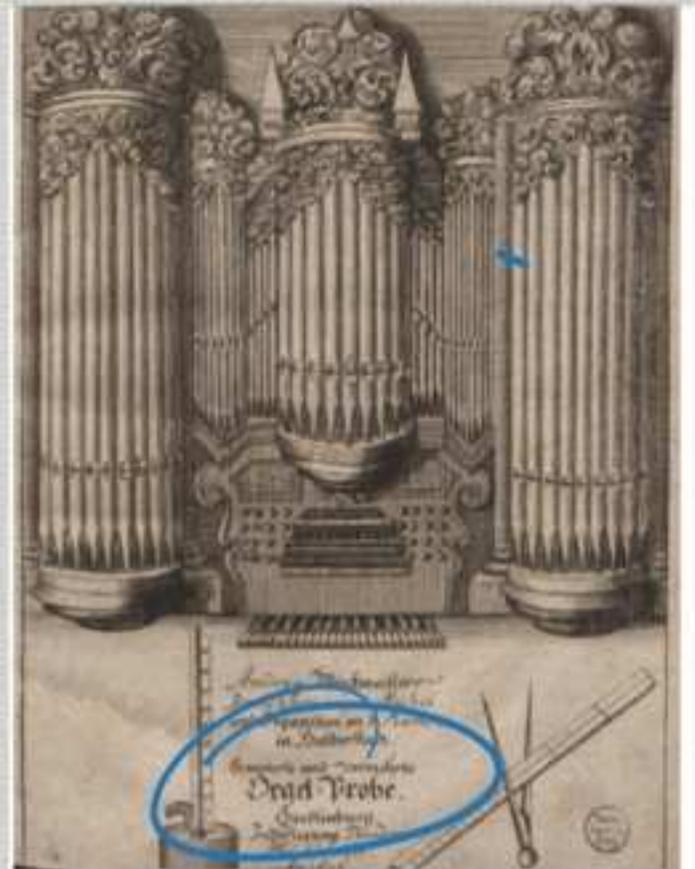
WOLFSQUINTE

"denn sie kault wie ein Wolf"

# § 6.6 Wohltemperierte Strunnen

Andreas Werckmeister  
(1645-1706)

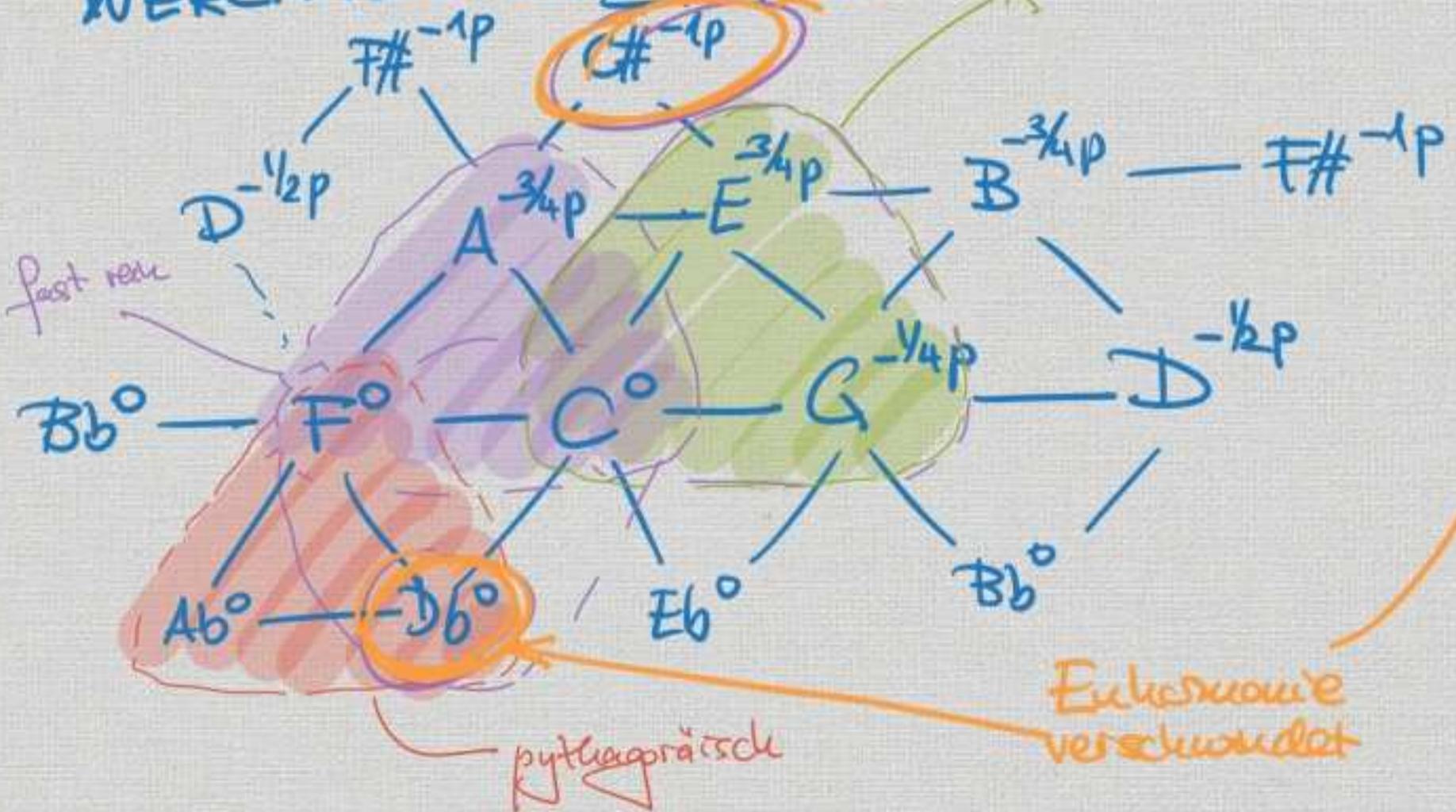
Idee: Den Fehler so zu minimieren, daß der euklidische Abstand exakt ein pythagoreisches Komma ist.



Werckmeister: III, IV, V, VI

Die bekannteste ist  
Werckmeister III

WERCKMEISTER III



Effekt

① Intonation ist geschlossener.

② Die zentralen Töne sind rein gestimmt; nach unten und nach oben wird es immer pythagoräischer.

Insbesondere kann man ohne Probleme die C# / Db-Taste mit C# stimmen, da

$$C\#^{1p} = Db^0.$$

**Johann Sebastian Bach**



1748 portrait of Bach, showing him holding a copy of the six-part canon BWV 1076.<sup>[1]</sup>

**Born** 21 March 1685 (O.S.)  
31 March 1685 (N.S.)  
Eisenach

**Died** 28 July 1750 (aged 65)  
Leipzig

**Works** List of compositions

**Signature**

*Johann Sebastian Bach.*



Title page of *Das Wohltemperierte Clavier*, Book 1 (autograph)

*Elf Kugel.  
Spekulation, ob das  
Kugel die Stimmung  
ausdrückt.*

Das Wort "wohltemperiert" ist hauptsächlich aus Baches **WOHLTEMPERIERTEM KLAVIER** bekannt. Welche Stimmung verwendete Bach:  
Wir wissen es nicht und viele Autoren haben spekuliert.

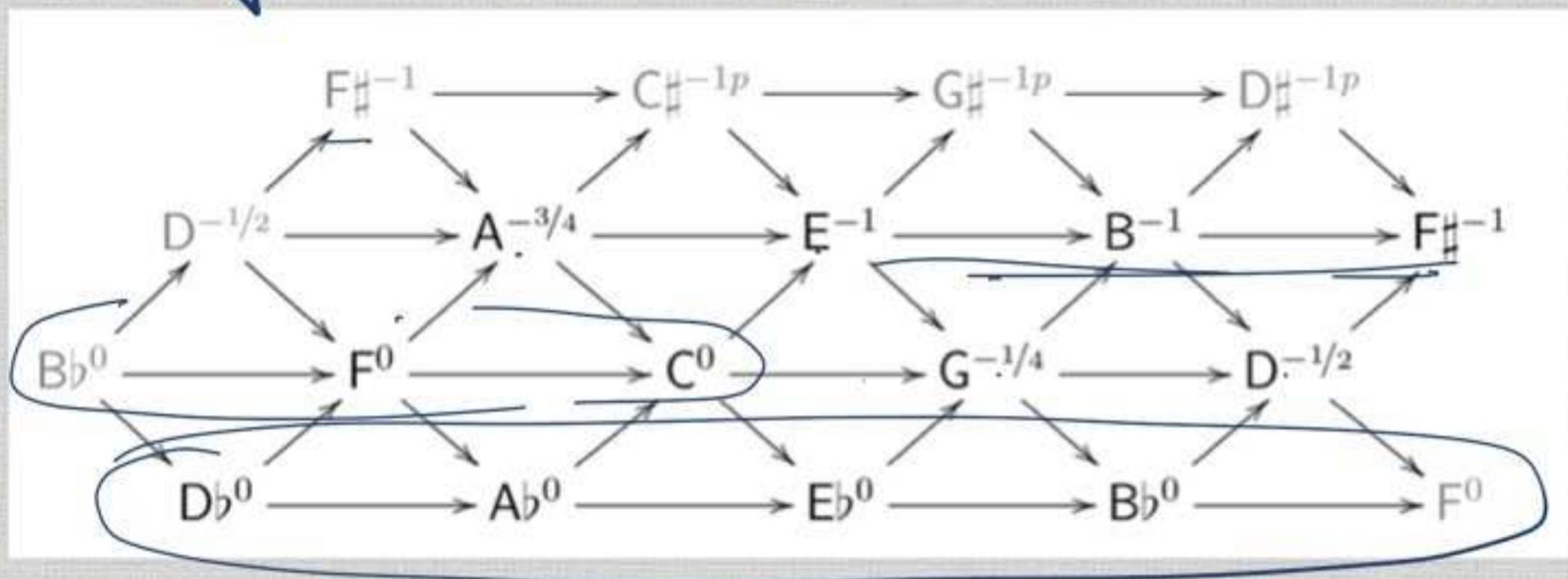
Der Bach-Schüler Kirnberger  
 entwickelte wohltemperierte  
 Stimmungen lange nach  
 Werckmeister.



Kirnberger III

Bach-Schüler

1721-1783



Kirnberger III ist Werckmeister III  
 sehr ähnlich.

# § 6.7 Charaktere der Tonarten

Halbtonschritte	0	2	4	5	7	9	11
Pythagoräische Stimmung							
C-Dur	0	0	0	0	0	0	0
F-Dur	0	0	0	0	0	0	0
B $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	0
E $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	0
A $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	0
Reine Stimmung für C							
C-Dur	0	0	-1	0	0	-1	-1
F-Dur	0	0	-1	+1	0	0	-1
B $\flat$ -Dur	+1	0	0	+1	0	0	-1
E $\flat$ -Dur	0	-1	-1	0	-1	-1	-2
E $\flat$ -Dur	+1	0	0	+1	+1	0	0
A $\flat$ -Dur	0	-1	-1	0	0	-1	-1
A $\flat$ -Dur	+1	+1	0	+1	+1	0	0
	0	0	-1	0	0	-1	-1
Mitteltönige Stimmung							
C-Dur	0	-1/2	-1	+1/4	-1/4	-3/4	-5/4
F-Dur	+1/4	-1/4	-3/4	+1/2	0	-1/2	-1
B $\flat$ -Dur	0	-1/2	-1	+1/4	-1/4	-3/4	-5/4
B $\flat$ -Dur	+1/2	0	-1/2	+3/4	+1/4	-1/4	-3/4
E $\flat$ -Dur	0	-1/2	-1	+1/4	-1/4	-3/4	-5/4
E $\flat$ -Dur	+3/4	+1/4	-1/4	+1	+1/2	0	-1/2
A $\flat$ -Dur	0	-1/2	-1	+1/4	-1/4	-3/4	-5/4
A $\flat$ -Dur	+1	+1/2	0	+5/4	+3/4	+1/4	-1/4
	0	-1/2	-1	+1/4	-1/4	-3/4	-5/4
Werckmeister III							
C-Dur	0	-1/2p	-3/4p	0	-1/4p	-3/4p	-3/4p
F-Dur	0	-1/4p	-3/4p	0	0	-1/2p	-3/4p
B $\flat$ -Dur	0	0	-1/2p	0	0	-1/4p	-3/4p
E $\flat$ -Dur	0	0	-1/4p	0	0	0	-1/2p
A $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	-1/4p

Alle Tonarten gleich.

Alle Tonarten verschieden

Alle Tonarten gleich:  
 GTS =  $q s^{-1/2}$   
 HTS =  $h s^{5/4}$

Alle Tonarten verschieden

Abbildung 9: Tonleitern der Tonarten C-Dur, F-Dur, B $\flat$ -Dur, E $\flat$ -Dur und A $\flat$ -Dur in der pythagoräischen, reinen, mitteltönigen und Werckmeister III-Stimmung. Die Stimmung wird in Abweichung von der pythagoräischen Stimmung angegeben und auf den Grundton normalisiert.

Mau sieht schon, daß C-Dur fast mitteltönig ist und A $\flat$ -Dur fast pythagoräische.

Vom 17.-19. Jhd. gab es eine reiche Literatur mit emotiven Beschreibungen der verschiedenen klingenden Tonarten.

## BEISPIELE:

C-Dur. "Freudig und kriegerisch" (Charpentier); "nicht sehr edel, aber auch gar nicht gemein" (Ribock); "ganz rein" (Schubart); "eine Mischung von heiterer Fröhlichkeit und sanftem Ernst" (Kellner); "heiter und rein" (Knecht).

G-Dur. "Süß und freudig" (Charpentier); "fröhlich und glänzend" (Masson); "angenehm und ländlich" (Knecht); "beruhigend" (Rochlitz); "ein wenig fröhlich mit einer Richtung ins Gewöhnliche" (Berlioz).

D-Dur. "Freudig und sehr kriegerisch" (Charpentier); "etwas scharf und eigensinnig" (Mattenhesson); "aufbrausende Munterkeit" (Vogler); "der Ton des Triumphes, des Hallelujas, des Kriegsgeschreis, des Siegesjubels" (Schubart); "pompös und rauschend" (Knecht).

A-Dur. "Freudig und ländlich" (Charpentier); "Ausdruck der Freude, der Fröhlichkeit, des Tanzes" (Ribock); "fröhlich und hell" (Knecht).

E-Dur. "Lärmend und laut" (Charpentier); "verliebte und dabei zärtliche Leidenschaft" (Vogler); "feurig und wild" (Knecht); "eine der hellsten, stärksten Farben" (Hand); "glänzend, prächtig, erhaben" (Berlioz).

F-Dur. "Wütend und temperamentvoll" (Charpentier); "Gefälligkeit und Ruhe" (Schubart); "sehr still" (Vogler); "sanft und ruhig" (Knecht).

B $\flat$ -Dur. "Großartig, freudig" (Charpentier); "Majestät, ruhig in seiner Größe" (Ribock); "heitere Liebe, gutes Gewissen, Hoffnung" (Schubart); "lieblich und zärtlich" (Knecht).

E $\flat$ -Dur. "Grausam und hart" (Charpentier); "der Ton der Liebe, der Andacht, des traulichen Gesprächs mit Gott" (Schubart); "prächtig und feierlich" (Knecht); "majestätisch, durchaus vollklingend, süß, schwermütig" (Berlioz).

A $\flat$ -Dur. "Tod, Grab, Verwesung" (Schubart); "die Tonart, bei welcher die Seele für ein Überirdisches aufgeht" (Hand); "süß, verhangen und sehr edel" (Berlioz).

Man beachte: nicht immer konsistent.

# ÜBERSICHT ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN DER STIMMUNGEN

	PYTHA-GORÄISCH	REIN	MITTEL-TÖNIG	WOHL-TEMPERIERT	GLEICH-STÖFIG
IRRATIONALE VERHÄLTNISSE	keine	keine	einige	einige	alle
QUINTEN	alle rein	Hauptquarten: rein Nebenterten: unrein	alle approximativ rein	einige rein andere approx. rein	keine rein
TERZEN	keine rein	Hauptquarten: rein Nebenterten: unrein	alle approximativ rein	einige rein andere unrein	keine rein
HALBTON-/GANZTONSCHRITZE	alle gleich	unterschiedlich	alle gleich	unterschiedlich	alle gleich
TONLEITERN	alle gleich	unterschiedlich	alle gleich	unterschiedlich	alle gleich
ENHARMONIE	p	$s^3 p^{-1}$	$s^3 p^{-1}$	keine	keine