Mathematik & Musik IV

VIERTE VORLESUNG
22. März 2024
VORMITTAGS

Erinnerung an VL I-III

Kapitel 1 → "Pythagoras"
Pythagoräisches Prinzip
"Je kleiner desto schöner der Klang"
HARMONISCHE INTERVALLE
2:1 3:2 4:3

Ziel. Mathematischen Hintergrund verstehen.
"Ohr/Gehör"
Alle Klänge sind Superpositionen
= Summen.
Wie können wir Grundtöne rekonstruieren?

Kapitel 2 Die schwingende Saite
zu schwierig! stattdessen Federpendel

Lösungen des Teddypendels:

$$\lambda \sin 2\pi\nu t + \mu \cos 2\pi\nu t$$

für eine Frequenz ν.

[Dgl. 2. Ordn.
⇝ Zwei Dgl. 1. Ordn.
⇝ Lösung Matrixexponential
⟶ Ausrechnen]

$$\lambda \cdot \sin 2\pi\nu t + \mu \cos 2\pi\nu t =$$

$$C \cdot \sin(2\pi\nu t + \alpha)$$

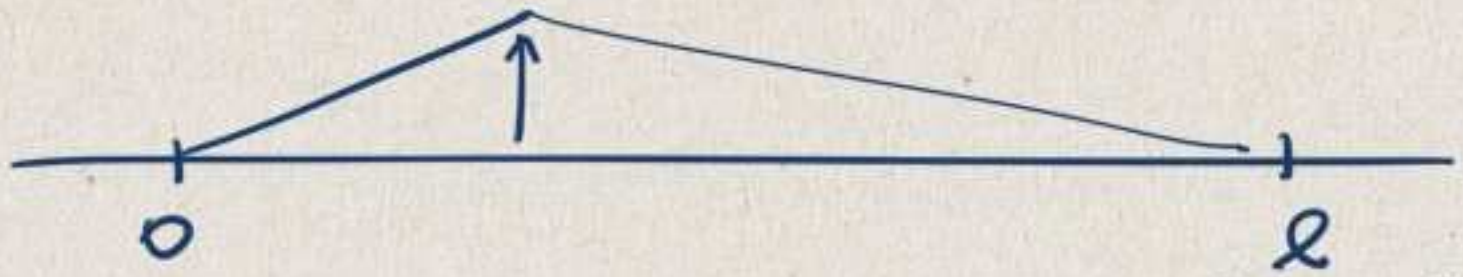
C ↑ Amplitude
ν ↑ Frequenz
α ↑ Phase

← BESTIMMENDE FAKTOR FÜR DEN CHARAKTER DER LÖSUNG

Anwendung: SCHWEBUNGEN

KAPITEL 3: Die Wellengleichung

Zurück zur schwingenden Seite:



Die Physiker ermittelte die mathematischen Bedingungen, die hier erfüllt sein müssen. Nennt man

die Wellengleichung

Dies ist eine Gleichung mit zwei Variablen: x-Achse (x) und Zeit (t).

Ableitung nach x schreibt man als partielle Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$;

ebenso Ableitung nach t: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Ebenso zweite Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}$

Die Wellengleichung

$$(WG) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

für eine Konstante C, die durch die physikalischen Begebenheiten bestimmt ist (später mehr).

Sogenannte PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG (PDE)
Partial Differential Equations

Die Theorie der PDE ist deutlich schwieriger als die der geo. Dgl.

§ 3.1 D'Alemberts Methode

D'Alembert bewies den folgenden Satz:

Theorem Ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (WG), so gibt es Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß

$$\varphi(x,t) = f(x+\sqrt{c}t) + g(x-\sqrt{c}t).$$

Jede Welle besteht aus zwei gegenläufigen Wellen.

Korollar Ist φ eine Lösung von (WG) mit $\varphi(0,t) = 0 = \varphi(l,t)$ für alle t, so ist $\varphi(x,t) = f(x+\sqrt{c}t) - f(\sqrt{c}t - x)$ für eine $2l$-periodische Fkt. f.

Jean le Rond d'Alembert
FRS

Pastel portrait of d'Alembert by Maurice Quentin de La Tour, 1753

Born	Jean-Baptiste le Rond d'Alembert 16 November 1717 Paris, France
Died	29 October 1783 (aged 65) Paris, France

Beweis Nach d'Alembert

(1) $\varphi(x,t) = f(x+\sqrt{c}t) + g(x-\sqrt{c}t)$

(2) $\varphi(0,t) = 0$

(3) $\varphi(l,t) = 0$

Setze (2) in (1) ein:

$$\varphi(0,t) = 0 = f(0+\sqrt{c}t) + g(0-\sqrt{c}t)$$
$$= f(\sqrt{c}t) + g(-\sqrt{c}t)$$
$$\Longleftrightarrow f(\sqrt{c}t) = -g(-\sqrt{c}t)$$

Da $c>0$, ist $\sqrt{c}>0$ und somit für alle t

(4) $$f(t) = -g(-t).$$

Ersetze nun g in (1) vermittels (4):

$$\varphi(x,t) = f(x+\sqrt{c}t) - f(\sqrt{c}t-x)$$

[Das war die erste Bed. des Problems.]

Verwenden wir (3]:

$$0 = \varphi(l,t) = f(l+\sqrt{c}t) - f(\sqrt{c}t-l)$$
$$\Longleftrightarrow f(l+\sqrt{c}t) = f(\sqrt{c}t-l)$$

Setze $s := \sqrt{c}t - l$

$$f(s+2l) = f(s)$$

$\Longrightarrow$ also ist f $2l$-periodisch. q.e.d.

Bemerkung:

Da f $2l$-periodische ist und

$$\varphi(x,t) = \underbrace{f(x+\sqrt{c}t)}_{\frac{2l}{\sqrt{c}}\text{-periodisch}} - \underbrace{f(\sqrt{c}t-x)}_{\frac{2l}{\sqrt{c}}\text{-periodisch}}$$

also ist $t \longmapsto \varphi(x,t)$ für festes x

$\frac{2l}{\sqrt{c}}$-periodisch.

Vorschau Dies wird uns in VL V & VI erlauben, Fourieranalyse auf diese Weise anzuwenden.

§ 3.2 Die Bernoulli-Lösung

(WG) in der Form des Korollars:

$$\varphi(x,t) = f(x+\sqrt{c}t) - f(\sqrt{c}t - x)$$

Bernoulli fand:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Achtung: Wir müssen noch überprüfen, daß dies eine Lösung ist. [Sieht aus, als ob f $2l$-periodisch ist.]

$$\varphi(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l} + \frac{\sqrt{c}t\pi}{l}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{c}t\pi}{l} - \frac{\pi x}{l}\right)$$

Beh. $\varphi(x,t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi\sqrt{c}}{l}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$

D.h. daß für festes x die Schwingung eine Sinusschwingung

$$\sin\left(2\pi\frac{\sqrt{c}}{2l}t\right)$$ ist, also

Frequenz $\frac{\sqrt{c}}{2l}$.

Beweis der Beh nächste Seite

Daniel Bernoulli

Portrait of Daniel Bernoulli (1720-1725)

Born	8 February 1700 Groningen, Dutch Republic
Died	27 March 1782 (aged 82) Basel, Republic of the Swiss
Nationality	Swiss

Bek. $\cos\left(\frac{\pi x + \sqrt{c}t\,\pi}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{-\pi x + \sqrt{c}t\,\pi}{\ell}\right) = b$

$a =$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi\sqrt{c}}{\ell}t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right).$$

[Additionstheorem zu cos:

$$\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$]

Mit $a := \frac{\pi x + \sqrt{c}t\,\pi}{\ell}$ $b := \frac{-\pi x + \sqrt{c}t\,\pi}{\ell}$ ist

$$a+b = \frac{2\sqrt{c}t\,\pi}{\ell}$$

$$\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{c}t\,\pi}{\ell}$$

Ebenso $a-b = \frac{2\pi x}{\ell} \Longrightarrow \frac{a-b}{2} = \frac{\pi x}{\ell}$

Damit ist die Bek. bewiesen.

Wir müssen noch zeigen, daß die Bernoulli-Lösung wirklich

$$(WG.)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

löst.

$$\varphi(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{-\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\pi\sqrt{C}}{\ell}\sin\left(\frac{\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi\sqrt{C}}{\ell}\sin\left(\frac{-\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\pi^2 \cdot C}{\ell^2}\cos\left(\frac{\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi^2 C}{\ell^2}\cos\left(\frac{-\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right)$$

$$= (-1)\frac{\pi^2 C}{\ell^2}\left(\cos(\cdots) - \cos(\cdots)\right)$$

$$= -\frac{\pi^2 C}{\ell^2}\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\pi}{\ell}\sin\left(\frac{\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi}{\ell}\sin\left(\frac{-\pi x+\sqrt{C}t+\pi}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{\ell^2}\cos(\cdots) + \frac{\pi^2}{\ell^2}\cos(\cdots)$$

$$= -\frac{\pi^2}{\ell^2}\varphi$$

Also $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

§3.3 Frequenzberechnungen

Was ist eigentlich C?
Konstante aus physikalischen Gegebenheiten.

$$C = \frac{T}{\lambda}$$ wobei

T die Spannkraft der Saite und
λ die lineare Dichte der Saite.

Die <u>lineare Dichte</u> ist Masse pro Länge der Saite (also gemessen in $kg\,m^{-1}$) und verhält sich wie folgt zur körperlichen Dichte ρ: $\lambda = \rho A$, wobei A der Flächeninhalt des Querschnitts der Saite, also $\lambda = \rho \pi r^2$ (r Radius der Saite).

The Reverend
Marin Mersenne

Born	8 September 1588 Oizé, Maine, France
Died	1 September 1648 (aged 59) Paris, France
Nationality	French

Wir hatten $\nu = \frac{\sqrt{C}}{2l} = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{1}{2l}$

ν → Frequenz

MERSENNEsche GESETZE
(auch: Gesetze der schwingenden Saite)

(I) *Das Gesetz der Länge.* Die Frequenz ist invers proportional zur Saitenlänge; d.h. Verdopplung der Saitenlänge halbiert die Frequenz.

(II) *Das Gesetz der Spannkraft.* Die Frequenz ist proportional zur Wurzel der Spannkraft, d.h. Vervierfachung der Spannkraft verdoppelt die Frequenz.

(III) *Gesetz der linearen Dichte.* Die Frequenz ist invers proportional zur Wurzel der linearen Dichte, d.h. Vervierfachung der linearen Dichte halbiert die Frequenz.

Bereits: $\lambda = \varrho \pi r^2$.

Damit $\nu = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{1}{2\ell} = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\varrho \pi}\, r} \frac{1}{2\ell}$

(IV) *Das Gesetz des Durchmessers.* Die Frequenz ist invers proportional zur Saitendicke, d.h. Verdopplung des Durchmessers halbiert die Frequenz.

Aufgabe 20. Leiten Sie aus der Mersenneschen Formel das folgende Gesetz her: "Bei gleicher Frequenz ist die Länge einer Saite invers proportional zum Durchmesser der Saite."

Material	Dichte (in $\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
Nylon	1.100
Seide	1.140
Rosshaar	1.300
Naturdarm	1.350
Stahl	7.860
Messing	8.500
Nickel	8.900
Kupfer	8.960

} ρ

Abbildung 5: Liste von Dichten typischer Saitenmaterialien

Physik

mechanische Spannung $\sigma = \frac{T}{A}$, wobei A der Durchschnitts-fläche der Seite

Typische Klavier – mechanische Spannung

$$\sigma = 10^9\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

Man beachte $\frac{T}{\lambda} = \frac{\sigma A}{\rho A} = \frac{\sigma}{\rho}$.

Angenommen wir haben Stahlseite $\rho = 7860$.

$$\frac{T}{\lambda} = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{10^9}{7860} \approx 127226$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \approx 356.$$

$$\nu = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \cdot \frac{1}{2l} = \frac{356}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{178}{l}.$$

Bsp.

$\nu = 440\ \mathrm{Hz}$

$\Rightarrow l = \frac{178}{440} \approx 0{,}4045\ \mathrm{m}$

40 cm

Aufgabe 21. Nehmen Sie an, daß Klaviersaiten mit einer Spannkraft von 900 N gespannt sind und daß die Diskantsaiten im Klavier einen Durchmesser von 0,6 mm haben. Der höchste Ton eines Klaviers wird üblicherweise auf etwa 4000 Hz gestimmt. Welche Saitenlänge brauchen wir für diesen Ton, wenn die Saiten aus den in Abb. 5 angegebenen Materialien sind?

Aufgabe 22. Mit den Angaben aus der vorigen Aufgabe, was muß Durchmesser einer Saite aus Stahl sein, damit sie in ein 150cm hohes Klavier paßt und einen Ton der Frequenz 55 Hz liefert? Wie hoch müßte ein Klavier für einen Ton von 55 Hz mindestens sein, welches mit Naturdarmsaiten mit maximal $2\frac{1}{2}$ mm Durchmesser bespannt ist?

Aufgabe 23. Eine Geige ist mit Naturdarmsaiten bespannt, die 30 cm lang sind und 0,45 mm Durchmesser haben. Eine übliche Geigenstimmung stimmt die vier Saiten auf 660 Hz, 440 Hz, $293\frac{1}{3}$ Hz und $195\frac{5}{9}$ Hz. Berechnen Sie die Spannkraft der vier Saiten auf der Geige.