MATHEMATIK & MUSIK

VORLESUNG III

20. März 2024
Nachmittags 15^{45}

§ 2.5 Das Matrixexponential

2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir definieren

$$A^0 = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

mal

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A \quad A^4 = A^3 \cdot A$$

Allgemein rekursiv: $A^{k+1} := A^k \cdot A$.

Notation: $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$

Insbesondere: $a_0 = 1 = d_0$; $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $d_1 = d$

Matrixnorm:

$$\|A\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Diese ist submultiplikativ.

Aufgabe 10. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie per Induktion, daß $A^{2k} = 6^k E$ und $A^{2k+1} = 6^k A$, wobei E die 2-dimensionale Einheitsmatrix ist.

Satz $\|A\cdot B\| \leq \|A\|\|B\|$.

Insbesondere: $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Beweis $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\|A\cdot B\| = (ae+bg)^2 + (af+bh)^2 + (ce+dg)^2 + (cf+dh)^2.$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\boxed{\begin{aligned} (ae+bg)^2 &\leq (a^2+b^2)(e^2+g^2) \\ (af+bh)^2 &\leq (a^2+b^2)(f^2+h^2) \\ (ce+dg)^2 &\leq (c^2+d^2)(e^2+g^2) \\ (cf+dh)^2 &\leq (c^2+d^2)(f^2+h^2) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &\leq (a^2+b^2)(e^2+g^2) + (a^2+b^2)(f^2+h^2) + \\ &\qquad (c^2+d^2)(e^2+g^2) + (c^2+d^2)(f^2+h^2) \\ &= (a^2+b^2)\big((e^2+g^2)+(f^2+h^2)\big) + \\ &\qquad (c^2+d^2)\big((e^2+g^2)+(f^2+h^2)\big) \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2) \\ &= \|A\|\cdot\|B\|. \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir wollen ein Exponential für Matrizen:

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wir könnten also definieren:

$$\exp(A) := \boxed{\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} \end{pmatrix}}$$

Dafür müssen wir aber zeigen, daß diese vier Reihen konvergieren.

<u>Korollar</u> Die vier Reihen konvergieren.

<u>Beweis:</u> Zeigen dies für $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$; die anderen Fälle sind identisch.

Nach Def. $\|A^k\| = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2$,

also $a_k^2 \leq \|A^k\|$

$$|a_k| \leq \sqrt{\|A^k\|} \underset{\text{Satz}}{\leq} \left(\sqrt{\|A\|}\right)^k.$$

Monotoniekriterium für konvergente Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\|A\|}\right)^k}{k!} = \exp\left(\sqrt{\|A\|}\right)$$ *

D.h. die Reihe mit Koeff. $|a_k|$ ist beschränkt durch die konvergente Reihe *
und somit ist die Reihe mit a_k sogar absolut konvergent.

q.e.d.

§ 2.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Funktion $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gewöhnliche Dgl. erster Ordnung.

interpretiert als

$$\boxed{\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))}$$

Fixieren wir zusätzlich $\varphi(0) = x_0$, so heißt (F, x_0) ein Anfangswertproblem.

Definition

Dgl. heißt linear, falls

$F(x,y) =$
$a(x) \cdot y + b(x)$

linear mit konstanten Koeffizienten, falls

$F(x,y) =$
$a \cdot y + b$

homogen, falls linear und
$b = 0$

Sätze aus den Grundvorlesungen

① Peano

Falls F stetig, so ex. eine Lösung.

② Picard-Lindelöf

Falls F Lipschitz-stetig, so ex. eindeutige Lösung für Anfangswertprobleme.

Bemerkung

Falls φ, ψ Lösungen einer linearen homogenen Dgl. sind, so auch

$$\varphi + \psi$$

und $\lambda\varphi$

Also: die Lösungen bilden einen Unter-VR.

Sie erinnern sich:

Falls

$$\varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t)$$

eine homogene lineare Differentialgleichung ist, so ist

$$\varphi(t) = x_0 \cdot e^{g(t) - g(0)}$$

für x_0 Anfangswert und g Stammfkt. von a

die eindeutige Lösung.

Problem Nicht anwendbar auf den harmonischen Oszillator, da dieser eine Gleichung zweiter Ordnung ist

Trick

$$\varphi'' = C \cdot \varphi$$

Füge ein ψ mit $\psi = \varphi'$

$$\left(\varphi'' =\right) \boxed{\begin{aligned} \psi' &= C \cdot \varphi \\ \varphi' &= \psi \end{aligned}}$$

Wir haben eine Dgl. zweiter Ordnung in zwei miteinander verwobene Dgl. erster Ordnung verwandelt.

Stellen wir uns dies vor als Matrix, die auf den Vektor $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ wirkt:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \psi \\ C \cdot \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}}$$

§ 2.7 Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix.
Wir nennen A ein lineares System homogener gew. Dgl. ersten Ordnung mit konst. Koeffizienten und sagen, daß $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, falls

$$\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

M.a.W.
$$\varphi'(t) = a \cdot \varphi(t) + b\psi(t)$$
$$\psi'(t) = c \cdot \varphi(t) + d\psi(t).$$

<u>Theorem</u> Ist A ein solches System, so ist die Matrix $\exp(Ax)$ eine von x abhängige 2×2-Matrix und die Spaltenvektoren dieser Matrix bilden eine Basis des Lösungsvektorraumes von A.

[kein Beweis]

§ 2.8 Die Lösung des harmonischen Oszillators

$$\varphi''(t) = -c\varphi(t)$$

Das war unser harmonischer Oszillator. Mit $c := \frac{D}{m}$.

$\xrightarrow{\text{Trick}}$ von Seite 7

$$\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \varphi(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi' = \psi$ $\quad \left[\begin{matrix} \psi' = -c\varphi \\ \varphi' = \psi \end{matrix} \right]$ Trick.

Nach § 2.7 müssen wir nur $\exp(A)$ ausrechnen.

$$\boxed{A^0 := E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (-c)^0 \cdot E$$

$(-c)^0 \cdot A$ $\quad A^1 := A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$= -c \cdot E \quad (-c)^1 \cdot E$$

$(-c)^1 \cdot A$ $\quad A^3 = A^2 \cdot A = -c \cdot E \cdot A = -c \cdot A$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -c \cdot A \cdot A = -c \cdot -c \cdot E$$

$$= (-c)^2 \cdot E$$

$$(-c)^2 \cdot E$$

Es gilt (Induktion)

$$A^{2k} = (-c)^k \cdot E$$

$$A^{2k+1} = (-c)^k \cdot A$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k+1 \\ (-c)^k & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (-c)^k & \text{falls } n = 2k+1 \\ 0 & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} (-c)^{k+1} & \text{falls } n = 2k+1 \\ 0 & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k+1 \\ (-c)^k & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

$$\exp(Ax) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k x^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k x^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ (-c)^k & n = 2k \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

nach Definition

$$= \cos(\sqrt{c} \cdot x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}\, x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} = \cos(\sqrt{c} \cdot x)$$

$$\sum \frac{c_k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^{k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sqrt{c} \cdot \sin(\sqrt{c} \cdot x)$$

<u>Also</u> erhalten wir

$$\exp(Ax) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{c} \cdot x) & \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} \cdot x) \\ -\sqrt{c} \sin(\sqrt{c} \cdot x) & \cos(\sqrt{c} \cdot x) \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren sind die Basis des Lösungsraums, also

$$\varphi = \lambda \cos(\sqrt{c} x) + \mu \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} x)$$

und

$$\psi = \lambda(-\sqrt{c}) \sin(\sqrt{c} x) + \mu \cos(\sqrt{c} x)$$

Zusammenfassend:

Die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators ist

$$\lambda \cdot \cos(\sqrt{c} \cdot x) + \mu \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}\, x)$$

$$\mu^* := \frac{\mu}{\sqrt{c}}$$

oder allgemeiner

$$\lambda \cdot \cos(\sqrt{c}\, x) + \mu^* \sin(\sqrt{c}\, x)$$

Also Linearkombinationen von Kosinus & Sinus der gleichen Frequenz.

Also phasenverschobener Sinus der Frequenz

$$\frac{\sqrt{c}}{2\pi}.$$

§ 2.9 Schwebungen

Zwei Saiten, die den gleichen Ton geben sollen, aber nicht tun ...

<u>Frage</u> Kann man am Klang erkennen, wieviel Verstimmung vorliegt.

Nach dem vorigen sind die Schwingungen Sinusfunktionen

z.B. $\sin(\nu x - \varepsilon\nu x)$ und

$\sin(\nu x + \varepsilon\nu x)$ mit kleinem ε

die Verstimmung

können wir nun Additionstheoreme anwenden:

$$\sin(\nu x + \varepsilon\nu x) + \sin(\nu x - \varepsilon\nu x) =$$

$$2\sin(\nu x)\cdot\cos(\varepsilon\nu x)$$

[Additionstheorem in VL II]

D.h. Doppelte Lautstärke (Amplitude)
Mittelwert der Frequenz
Moduliert durch Kosinus mit Frequenz $\varepsilon\nu$
[= Hälfte der Differenz]

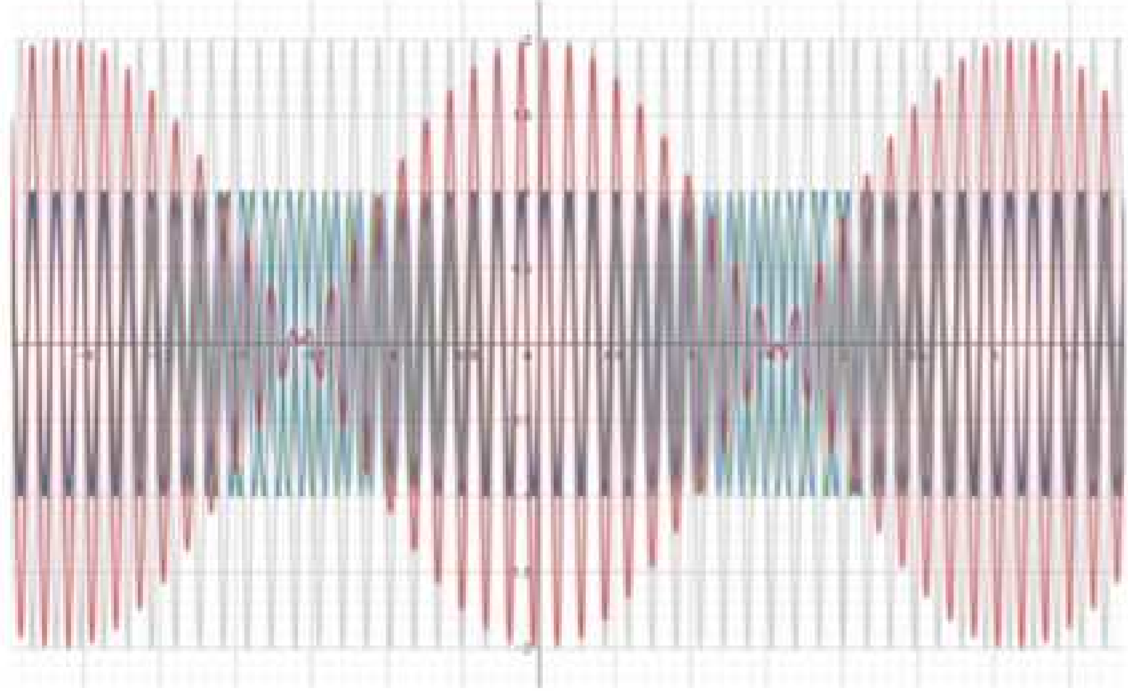

Abbildung 4: Schwebungen: Die blau und grün gezeichneten Kurven sind die Funktionen $x \mapsto \sin(39x)$ und $x \mapsto \sin(41x)$. Ihre Summe (rot gezeichnet) ist die durch $\cos(x)$ modulierte Kurve mit doppelter Amplitude und durchschnittlicher Frequenz $2\sin(40x)$ (hellgrau hinterlegt).

Schwebungen entstehen durch Modulierung und erlauben, direkt durch Hören die Differenz zu bestimmen.

Man kann z.B. mit einer Stoppuhr die Frequenz messen (z.B. wenn die Modulation 1 Hz ist, ist das ein Schlag pro Sekunde) und kennt dann die Verstimmung.

Aufgabe 15. Nehmen Sie an, eine Klavierstimmerin oder ein Klavierstimmer versucht, zwei Saiten gleich zu stimmen. Sie oder er schlägt die Saiten an und hört eine Schwebung von 2 Hz. Um wieviel muß man die erste der beiden Saiten verstimmen, damit die Saiten gleich klingen? Hängt die Antwort von der Tonhöhe der Saiten ab? Weiss man, ob man nach unten oder nach oben stimmen muß?

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit dem Phänonen der Schwebungen bei drei Saiten.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, daß

$$\sin(\nu x - \varepsilon\nu x) + \sin(\nu x) + \sin(\nu x + \varepsilon\nu x) = \left(4\cos^2(\tfrac{\varepsilon}{2}\nu x) - 1\right)\sin(\nu x).$$

[*Hinweis.* Multiplizieren Sie mit $\sin(\frac{\varepsilon}{2}\nu x)$ und verwenden Sie die Additionstheoreme aus Abschnitt 2.4.]

Aufgabe 17. Angenommen, eine Klavierstimmerin oder ein Klavierstimmer hat von den drei Saiten für einen Klang die mittlere auf 220 Hz gestimmt und die beiden anderen weichen jeweils um 2 Hz nach unten und oben ab (218 Hz und 222 Hz). Eine Schwebung mit Frequenz 1 Hz, bei der sich jeweils ein lauter Ton und ein leiserer Ton der gleichen Frequenz abwechseln, ist zu hören. (Wenn Sie sich dies nicht vorstellen können, erzeugen Sie den Ton mittels eines Tongenerators mit drei Sinusschwingungen mit 218, 220 und 222 Hz.) Welche Frequenz hat der Ton? Erklären Sie die Frequenz und das Klangverhalten mathematisch.

[*Hinweis.* Betrachten Sie das Verhalten der Funktion $4\cos^2(x) - 1$.]