Mathematik & Musik

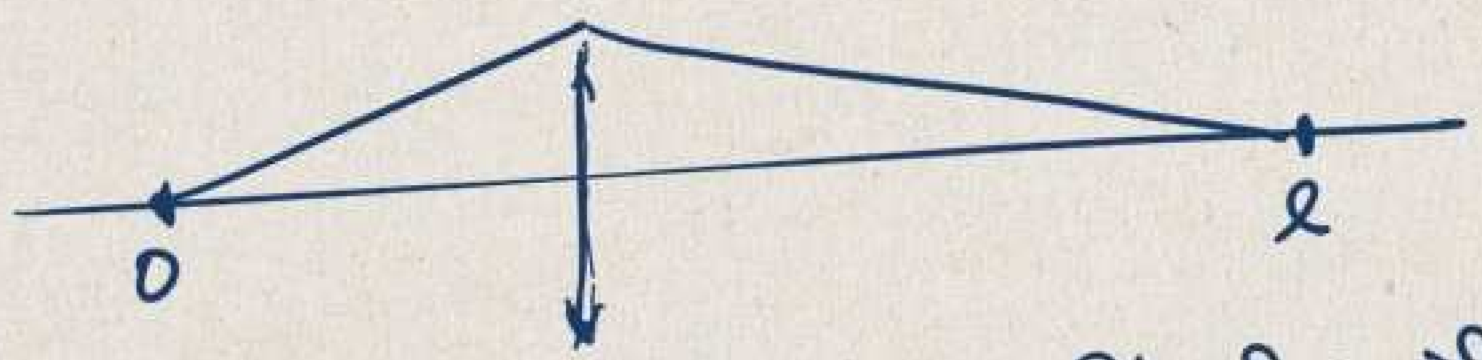
VORLESUNG II

20. März 2024
NACHMITTAGS
14 s.t.

KAPITEL 2:

SCHWINGUNGEN

Motiviert durch die schwingende Saite



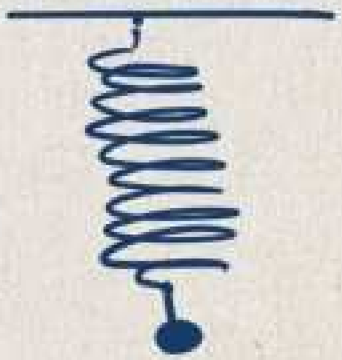
Die Saite tendiert zum Gleichgewichtspunkt, schießt wg. des Trägheitsprinzips darüber hinaus und pendelt wieder zurück.

Zusätzliches Problem: dies hängt nicht nur von der Pendelbewegung ab, sondern auch von der Position auf der Saite.

Das ist uns (in Kap. 2) zu kompliziert.

Stattdessen: das Federpendel

§2.1 Der harmonische Oszillator



Federpendel
— auch der harmonische Oszillator bezeichnet —
ist wie die Saite ohne die Wechselwirkung der anderen Massepunkte auf der Saite.

Physik

Rückstellkraft

$$F(t) = -D\varphi(t)$$

Federkonstante

φ die vertikale Position.

Zweites Newtonsches Gesetz:

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

Masse

Beschleunigung = Zweite Ableitung der Position. $= \varphi''(t)$

$$\boxed{\varphi''(t) = -\frac{D}{m}\varphi(t)}$$

Dies ist eine Differentialgleichung.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie, daß $\lambda \sin(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t) + \mu \cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t)$ die Gleichung (3) erfüllt.

Lineare Dgl.
2. Ordnung

Behauptung

(Ziel von Kapitel 2)

Die Lösungen von $\boxed{\varphi'' = -\frac{D}{m}\varphi}$

sind genau Linearkombinationen

von $\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right)$ und $\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\right)\cdot t$,

also

$$\lambda\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right) + \mu\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\right)\cdot t.$$

Um dies zu zeigen, brauchen wir:

(a) Vektorräume
(b) Trigonometrische Funktionen
(c) Lösen von Dgl.

§ 22 Vektorräume

Der VR der reellwertigen Funktionen

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

besteht aus $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Operationen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

punktweise Anwendung der Operation

Der Nullvektor in diesem VR ist die Funktion

$$\mathbb{O} : x \longmapsto 0 \text{ für alle } x$$

konstante Fkt. 0

fette Null

Eine TM $X \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist Unter-VR falls für alle $f, g \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f + g \in X$$
$$\lambda f \in X.$$

Aufgabe 4. Ist $(V, +)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so definieren wir die folgenden Operationen auf der Menge aller n-Tupel von Vektoren aus V: $(v_1, ..., v_n) + (w_1, ..., w_n) := (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$ und $\lambda \cdot (v_1, ..., v_n) := (\lambda \cdot v_1, ..., \lambda \cdot v_n)$. Zeigen Sie, daß V^n mit diesen Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. Welche Dimension hat V^n, wenn $\dim(V) = m$?

Satz Die Menge $\{\sin, \cos\} \subseteq F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist linear unabhängig.

Beweis z.z. falls

$$\mathbb{0} = \lambda \cdot \sin + \mu \cdot \cos \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Also nehmen wir $(*)$ an.

$(*)$ bedeutet: $\forall x \; \boxed{\lambda \cdot \sin(x) + \mu \cdot \cos(x) = \mathbb{0}(x) = 0}$

NORMALE GLEICHUNG IN $\mathbb{R}$.

Setze ich $x = 0$ ein:

$$\lambda \cdot \underset{\overset{\parallel}{0}}{\sin(0)} + \mu \cdot \underset{\overset{\parallel}{1}}{\cos(0)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \mu = 0.$$

Setze nun $x = \frac{\pi}{2}$ ein:

$$\lambda \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 0.$$

Das war zu zeigen. q.e.d.

Aufgabe 5. Seien $f(x) := \sin(x)$, $g(x) := \sin(2x)$ und $h(x) := \sin(3x)$. Zeigen Sie, daß die Mengen $\{f, g\}$ und $\{f, g, h\}$ linear unabhängige Teilmengen des Vektorraums $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

§ 2.3 Periodische, gerade und ungerade Funktionen

Funktion f heißt periodisch mit Periode p

falls f.a. x gilt

$$f(x) = f(x+p)$$

[Also auch
$f(x) = f(x+2p) = f(x+3p) = f(x+4p) =$ usw.]

<u>Satz</u> Die Periode p Funktionen bilden einen Unter-VR.

<u>Beweis.</u> z.z. falls f, g Periode p, so auch $f+g$ und λf.

$$(f+g)(x+p) \underset{\text{Def.}}{=} f(x+p) + g(x+p) \underset{\text{Per. } p}{=} f(x) + g(x) \underset{\text{Def}}{=} (f+g)(x).$$

$$(\lambda f)(x+p) \underset{\text{Def}}{=} \lambda \cdot f(x+p) = \lambda \cdot f(x) = (\lambda f)(x)$$

q.e.d.

Bemerkung

Jede Fkt mit Periode p hat auch Periode $k \cdot p$ für $k \in \mathbb{N}$.

Funktion f heißt **gerade** falls $\forall x$
$$f(x) = f(-x)$$
sie heißt **ungerade** falls $\forall x$
$$f(x) = -f(-x)$$

Spiegelsymm. an y-Achse

Rotationssymm. um Nullpunkt.

Satz Die geraden & ungeraden Fkt. bilden Unter-VR.

Beweis Ausrechnen für gerade: [ungerade genauso]

$$(f+g)(-x) \overset{\text{Def}}{=} f(-x) + g(-x) \underset{\text{gerade}}{=} f(x) + g(x) \underset{\text{Def}}{=} (f+g)(x).$$

$$(\lambda f)(-x) \overset{\text{Def}}{=} \lambda \cdot f(-x) \overset{\text{ge.}}{=} \lambda \cdot f(x) = (\lambda f)(x).$$

q.e.d.

AUFGABE 6. Rechnen Sie dies für "ungerade" nach.

Lemma Die Fkt. $\mathbb{O}$ ist die einzige Fkt., die sowohl gerade als auch ungerade ist.

Beweis Wir wissen für $x \in \mathbb{R}$

$$x = -x \iff x = 0$$

Falls f gerade und ungerade ist:

$$f(x) = f(-x) \quad \text{[gerade]}$$

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{[ungerade]}$$

$$\rightarrow f(-x) = -f(-x).$$

Also gilt für jedes x $f(x) = 0$, also $f = \mathbb{O}$. q.e.d.

§ 2.4 Trigonometrische Funktionen

Reihendarstellung

Offizielle Definition.

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{6}$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ sowie} \tag{7}$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{8}$$

Eigenschaften: sin, cos 2π-periodisch
sin ungerade
cos gerade

$$\boxed{\lambda \cdot \sin(2\pi \nu x + \alpha)}$$

Amplitude (λ), Frequenz (ν), Phase (α)

Man beachte:
$\sin(\nu x)$ hat Periode $\frac{2\pi}{\nu}$

Frequenzerhöhung sorgt für Periodenverringerung.

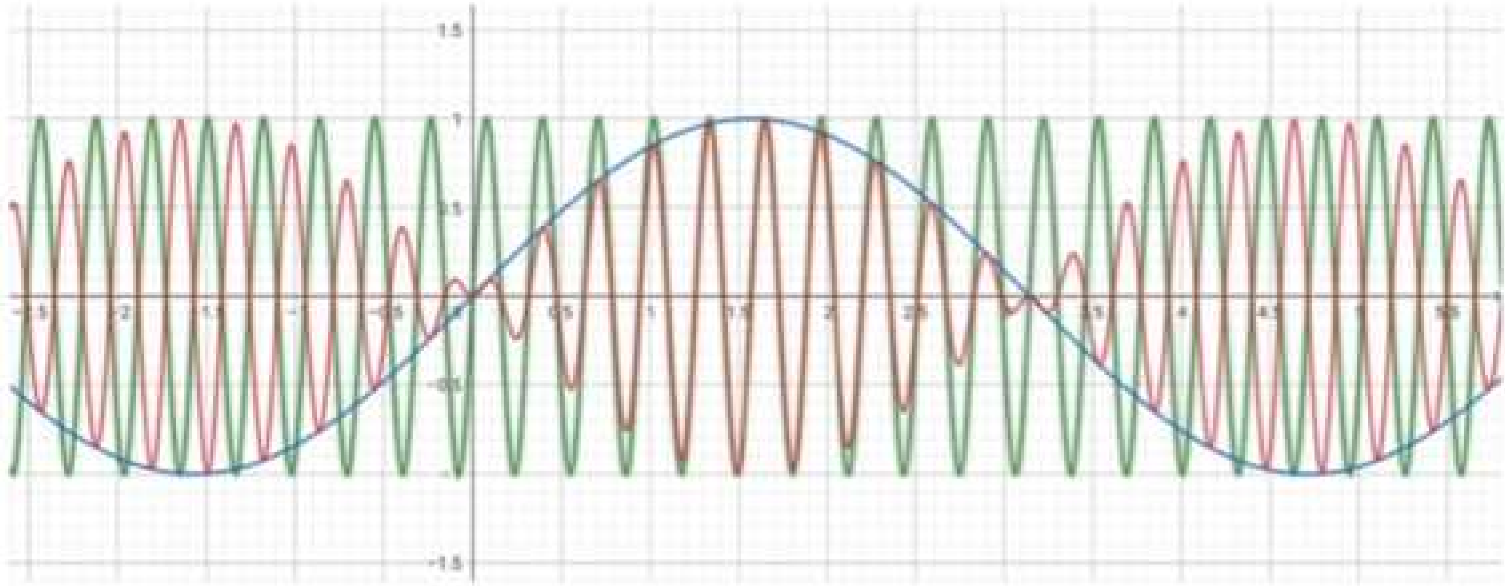


Abbildung 3: Die grün gezeichnete Funktion $f(x) = \sin(20x)$ wird durch die blau gezeichnete Funktion $g(x) = \sin(x)$ zur rot gezeichneten Funktion $f(x) \cdot g(x)$ moduliert.

Ein Produkt von zwei trigonometrischen Fkt.,

z.B.
$$\sin(20x) \cdot \sin(x)$$

heißt die durch $\sin x$ modulierte Fkt $\sin(20x)$.

Eine Fkt f heißt Phasenverschiebung von g

falls
$$f(x) = g(x+\alpha)$$

z.B. cos und sin sind phasenverschoben,

weil
$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aufgabe 7. Betrachten Sie die Kurve $f(x) := \sin(x) + \sin(2x)$ zwischen 0 und 2π. Zeigen Sie, daß f periodisch mit Periode 2π ist. Machen Sie sich klar, warum das Maximum dieser Funktion strikt kleiner als 2 sein muss und warum die Funktion drei Nullstellen zwischen 0 und 2π haben muss.

ADDITIONS-
THEOREME

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{9}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \tag{10}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \tag{11}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y), \tag{12}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1. \tag{13}$$

Aus Additionstheoremen neue gewinnen:

z.B. addiere (9) + (10)

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cancel{\cos x \sin y} + \sin x \cos y - \cancel{\cos x \sin y} = 2 \sin x \cos y.$$

Aufgabe 8. Leiten Sie die folgenden Additionstheoreme aus den oben vorgegebenen ab. Für (v) und (vi) nehmen Sie an, daß $\sin(x) \neq 0$ ist.

(i) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin(x)\sin(y)$,

(ii) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,

(iii) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$,

(iv) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$,

(v) $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} = 2\cos(x)$, und

(vi) $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 4\cos^2(x) - 1$.

Satz Für alle λ, μ, ν existieren C und α sd.

$$\lambda \sin(\nu x) + \mu \cos(\nu x) = C \cdot \sin(\nu x + \alpha)$$

Interpretation: Jede Linearkomb. von sin, cos mit gleicher Frequenz ist ein phasenverschobener Sinus.

Beweis. Falls $\mu = 0$, so ist nichts zu zeigen. $[C = \lambda$ und $\alpha = 0]$.

Ang. $\mu \neq 0$. Dann finde ich α so daß

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

[Weil cot jede reelle Zahl trifft: surjektiv ist.]

Setze $C := \frac{\mu}{\sin \alpha}$.

[Verwendet, daß nach Wahl von α $\sin \alpha \neq 0$.]

Rechne: $C \cdot \sin(\nu x + \alpha) = \frac{\mu}{\sin \alpha} \cdot \sin(\nu x + \alpha)$

ADDITIONSTHEOREM (9)

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$$\overset{(9)}{=} \frac{\mu}{\sin \alpha}\left(\sin(\nu x)\cos(\alpha) + \cos(\nu x) \cdot \sin(\alpha)\right)$$

$$= \mu\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin(\nu x) + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \cos \nu x\right)$$

$$= \mu\left(\frac{\lambda}{\mu} \sin(\nu x) + \cos \nu x\right)$$

$$= \lambda \sin(\nu x) + \mu \cos \nu x.$$

q.e.d.