

MATHEMATIK

& Musik

VORLESUNG

I

20. MÄRZ

2024

VORMITTAGS
(11 c.t.)

Mittwoch 20. März 2024

VL I 11¹⁵-12⁴⁵

VL II 14⁰⁰-15¹⁵

VL III 15⁴⁵-17⁰⁰

Freitag 22. März 2024

VL IV 11¹⁵-12⁴⁵

VL V 14⁰⁰-15¹⁵

VL VI 15⁴⁵-17⁰⁰

Montag 25. März 2024

VL VII 11¹⁵-12⁴⁵

VL VIII 14⁰⁰-15¹⁵

VL IX 15⁴⁵-17⁰⁰

Mittwoch 27. März 2024

VL X 11¹⁵-12⁴⁵

VL XI 14⁰⁰-15¹⁵

VL XII 15⁴⁵-17⁰⁰

Kein Übungsbetrieb,
aber von Zeit zu
Zeit werden

"Übungsgelegen-
keiten" (= Aufgaben)
angeboten.

KLAUSUR

MONTAG 15. April 2024

8:00-10:00

Online, open book

Kapitel 1

Einleitung

Kapitel 2

Schwingungen

Lineare Algebra

Trigonometrische Fkt

Differentialgleichungen

Ziel:

Warum
eigentlich
Sinus?

Kapitel 3

Die schwingende Saite

Partielle Differentialgleichungen

Lösungen und Beispiele

(Morse'sche Gesetze)

Kapitel 4

Fourier-Analyse

Anwendungen für Klänge

Kapitel 5

Harmonie

Pythagoras hatte recht!

Kapitel 6

Temperamente & Stimmungen

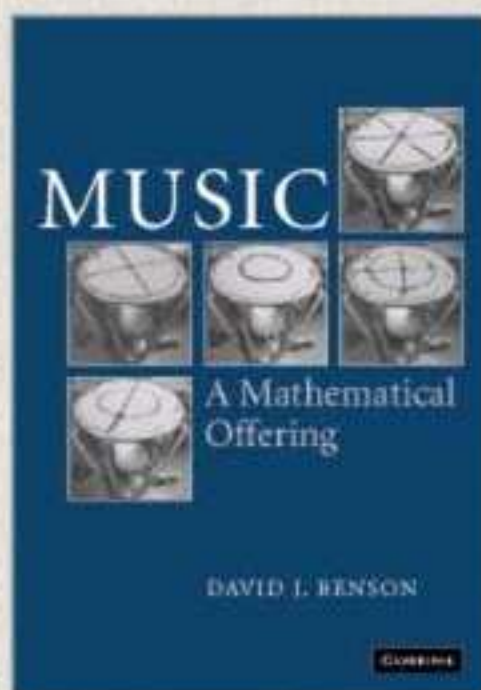
Terzen einfangen

- Reine Stimmung

- Mitteltönige Stimmung

- Wohltemperierte Stimmungen

David J. Benson



MUSIC.

A mathematical offering.

Cambridge University Press 2007

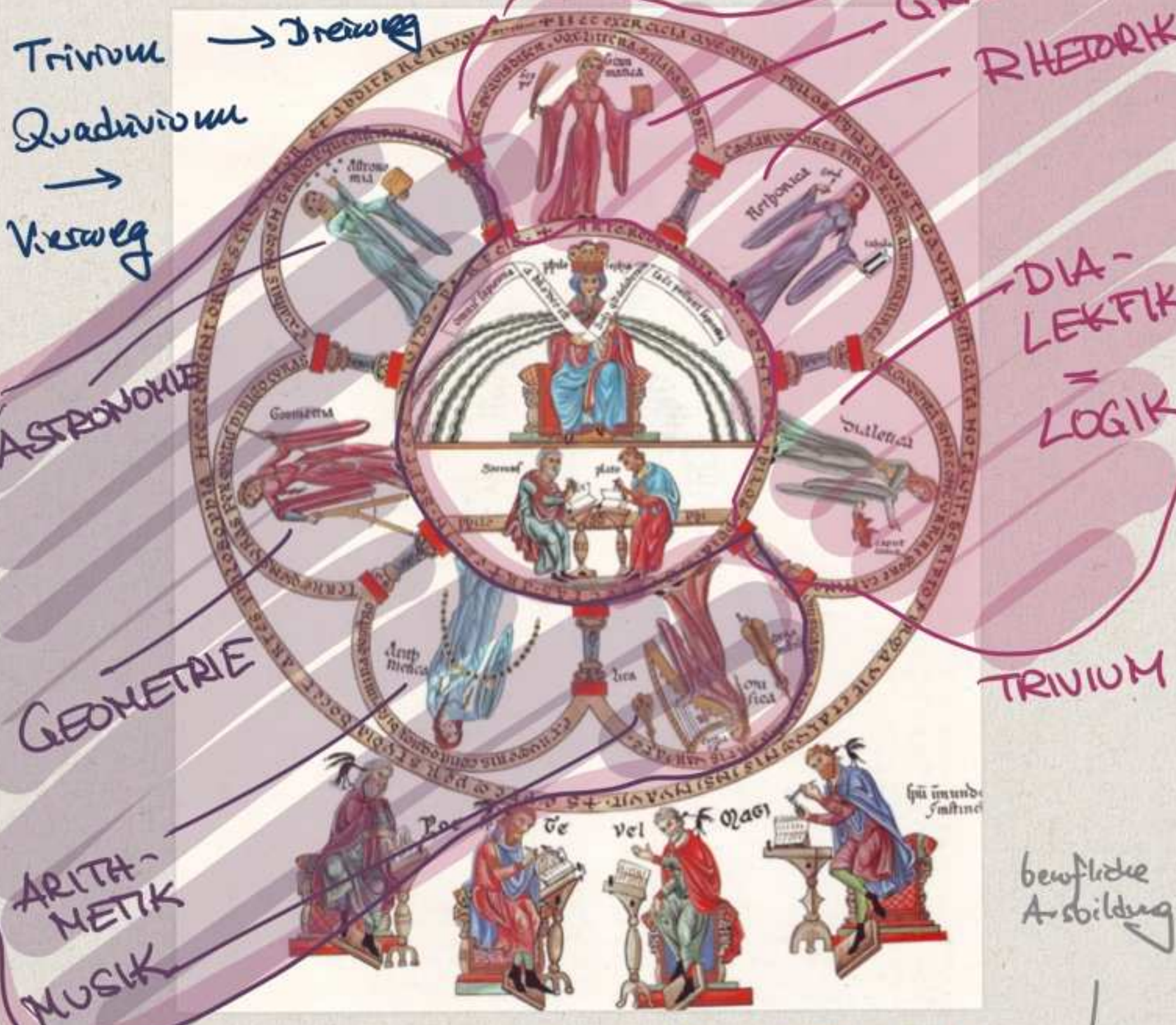
Now:

Kapitel 1

Einführung.

SEPTEN ARTES LIBERALES

Sieben freie Künste



Mittelalterliche Universität: Vier Fakultäten

ARTISTEN

MEDIZIN

JURISPRUDENZ

THEOLOGIE

QUADRIVIVUM

Die mathematischen Künste

üben das

RATIONALE

ARGUMENTIEREN.

Wieso ist Musik eine
"mathematische Kunst".

Musik ? ! ?

Boethius

BETONUNG DES EMOTIVEN
UND IRRATIONALEN CHARAKTERS
DER MUSIK

Nihil est enim tam proprium
humanitatis quam remitti

dulcibus modis,

adstringi

contrariis.

→ süße Klänge

→ entspannen

→ gegensätzliche

→ einengen

MUSIK

↔

EMOTION

Anicrus Maximus Severinus

BOETHIUS

ca. 480-524

De institutione musica

Grabmann:

Boethius

"der letzte Römer und der erste Scholastiker"



[I]ta proponimus, ut non omne iudicium sensibus demus, quamque rium huiusce artis sumatur omne principium. Sed principium quodam modo ... tenet auditus, postrema vero perfectio agnitionisque vis in ratione consistit. ... Haec igitur maxime causa fuit, cur relicto aurium iudicio Pythagoras ad regularum momenta migraverit.

Also schlagen wir vor, daß wir nicht alle Urteile den Sinnen überlassen, wenn auch die gesamte Grundlage dieser Kunst von Sinne des Ohrs herrührt. Aber diese Grundlage hält der Hörsinn in einer besonderen Weise; die wahre Perfektion und Kraft des Erkennens besteht aus der Vernunft. Dies war daher der Hauptgrund, weshalb Pythagoras, nachdem er das Urteil der Ohren ignoriert hatte, zur Bedeutung der Regeln weiterzog. (Boethius, *De institutione musica*, I.9 & 10.)

Literaturhinweis:
Lesen Sie
DE CONSOLA-
TONE
PHILOSOPHIAE
von
Boethius

Boethius's Definitionen

KONSONANZ :

suavis et uniformis

DISSONANZ :

aspera atque inuoluta

Man beachte: Definiert
nicht nach Gehör, sondern
emotiv!

angenehm & gleichförmig

rau und unangenehm

sehr interdisziplinäre
Disziplin

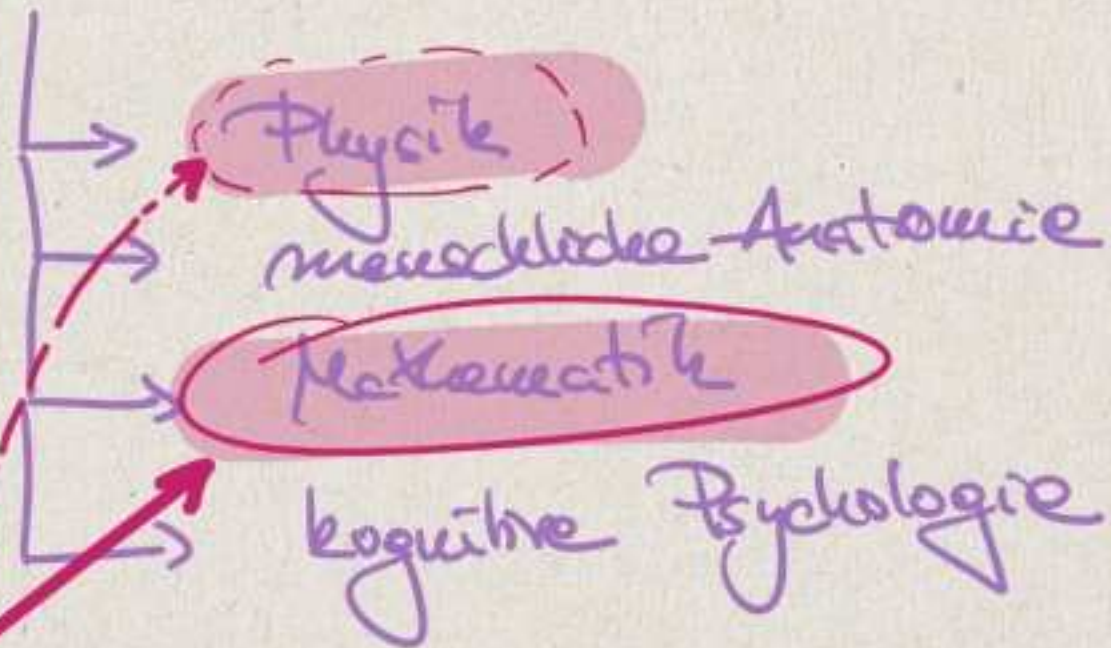
Musikwissenschaft:

philologische
ästhetische

gesellschafts-
wissenschaftliche

naturwissenschaftliche

Aspekte



UNSER SCHWERPUNKT



Pythagoras von Samos
c. 570-495 v. Chr. geb.

ca. 530 v. Chr. geb.
→ Schule in Croton
"Pythagoräer".

Berühmt für Mathematik, Naturwissenschaft, Musiktheorie



[Ο]ἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἀψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ... τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾤκηθησαν εἶναι. ἐπεὶ δὲ τούτων οἱ ἀριθμοὶ φύσει πρῶτοι ..., ἔτι δὲ τῶν ἀρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους, ἐπεὶ δὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιωθῆναι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἀρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμὸν.

Die sogenannten Pythagoräer befaßten sich ^{mit} Mathematik und waren die ersten, die dies taten; und sie glaubten, daß die mathematischen Grundprinzipien die Grundprinzipien der Welt sind. Und da die Zahlen natürlicherweise die ersten mathematischen Grundprinzipien sind ... (sie sahen auch die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonien in den Zahlen) und da es offensichtlich war, daß die gesamte Natur in den Zahlen repräsentiert ist und daß die Zahlen die ersten Grundprinzipien der Natur sind, nahmen sie an, daß die Elemente der Zahlen die Elemente von allem sind und daß die gesamte Welt eine Harmonie und eine Zahl ist. (Aristoteles, Metaphysik A 985b-986a)

Die Pythagoräer waren eine Kult / eine Sekte, die ihren Gründer überhöhte: Schweigegelübde, Nahrungsregeln, Gide, Zahlenmystik.

Pythagoräisches Grundprinzip

ALLES IST ZAHL!

Pythagoras ←
war ein Schamane
und hatte nichts
mit Mathematik zu tun.
Das kam alles später!

W. Burkert

→ Schamanismus -
these

Pythagoras ←
war kein Wissen-
schaftler und
hatte nichts mit Mystik
zu tun. Das kam alles
später!

Leonard Zuck

→ Wissenschafts-
these

Wichtige
Quelle!

CARMEN AUREUM

"Goldene Verse"

Inneres Leben der Pythagoreer

geschrieben irgendwann zwischen
Pythagoras Lebzeit und dem
4. Jhd. n. Chr. Geb.

ERLANGER BEITRÄGE ZUR
SPRACH- UND KUNSTWISSENSCHAFT

BAND X

WALTER BURKERT

WEISHEIT
UND WISSENSCHAFT

STUDIEN ZU PYTHAGORAS,
PHILOLAOS UND PLATON



VERLAG HANS CARL NÜRNBERG

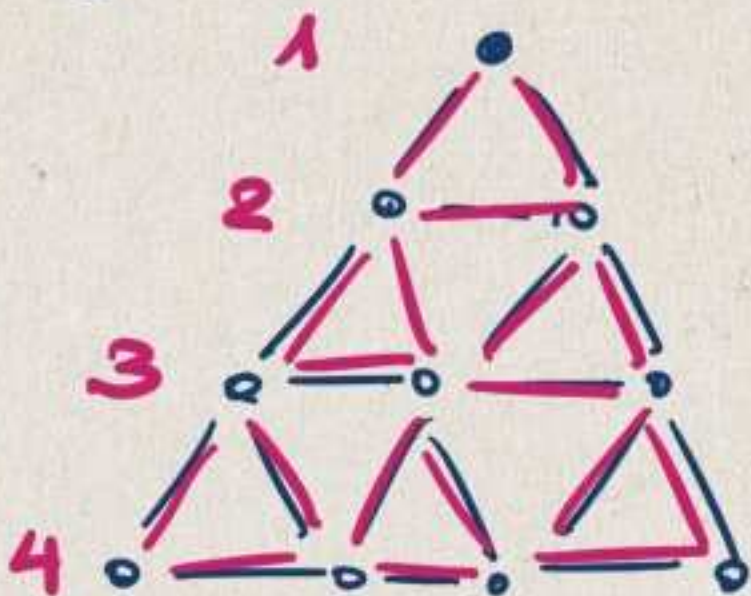


Burkert

Zahlenmystik

mystisches Symbol

Sicherlich im
NEOPYTHAGORÄISMUS
in der späten römischen
Kaiserzeit (= Boethius' Zeit); unclear, ob bereits
früher.



TETPAKTYS

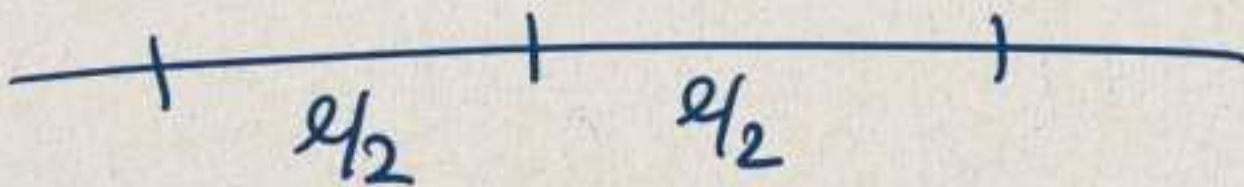
TETRAKTYS

"Die 10 entsteht aus 1, 2, 3, 4"

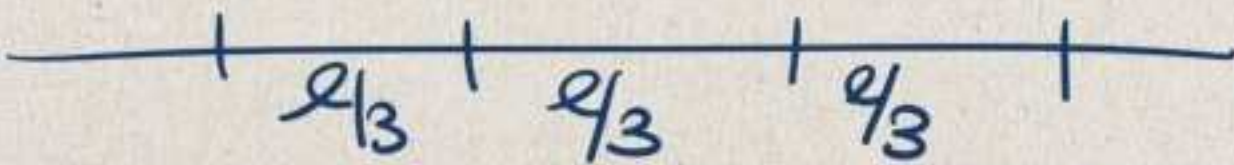
Pythagoras & Musik

Zugeschrieben: Pythagoras experimentierte mit Saiten.

Seite der
Länge l



Ton der Saite
mit Länge
 $l/2$ ist eine
OKTAVE höher
als der Ton mit
Länge l



Omnis musicae consonantiae aut in duplici aut in triplici aut in quadrupla aut in sesquialtera aut in sesquitertia proportionem consistant; et vocabitur quidem, quae in numeris sesquitertia, diatessaron in sonis, quae in numeris sesquialtera, diapente appellatur in vocibus, quae vero in proportionibus dupla est, diapason in consonantiis.

Alle Konsonanzen der Musik bestehen entweder aus einem Verhältnis 2:1 oder 3:1 oder 4:1 oder 3:2 oder 4:3; und man nennt, was dem Verhältnis 4:3 in Zahlen entspricht, *diatessaron* (Quarte) in Tönen, was dem Verhältnis 3:2 entspricht, *diapente* (Quinte), was aber im Verhältnis doppelt ist, *diapason* (Oktave). (Boëthius, *De institutione musica*, I.7.)

4:3 Quarte = DIATESSARON

3:2 Quinte = DIAPENTE

2:1 Oktave = DIAPASON

Pythagoras nennt diese WOHLKLINGEND und
schließt andere aus:

INSBESONDERE 5:4

grobe Terz

Aufgabe 1. Angenommen, wir haben einen Ton mit Frequenz 260 Hz und seine Oktave mit Frequenz 520 Hz. Welche Frequenz hat der Ton, der eine Quinte unterhalb des oberen der beiden Töne liegt? Was ist das Tonintervall zwischen diesem Ton und dem unteren der beiden ursprünglichen Töne (260 Hz)?

Pythagoras in der Schmiede

Traditionelle (= spätmittelalterliche) Vorgeschichte der Saitenexperimente.

[P]raeteriens fabrorum officinas pulsos malleos exaudit ex diversis sonis unam quodam modo concinentiam personare. ... [S]int verbi gratia malleorum quattuor pondera, quae subter scriptis numeris contineantur: XII, VIII, VIII, VI. Hi igitur mallei, qui XII et VI ponderibus vergebant, diapason in duplo concinentiam personabant. Malleus vero XII ponderum ad malleum VIII et malleus VIII ponderum ad malleum VI ponderum secundum epitritam proportionem diatessaron consonantia iungebatur. VIII vero ponderum ad VI et XII ad VIII diapente consonantiam permiscebant.

Als er an der Schmiede vorbeikam, hörte er wie die Schläge der Hämmer aus verschiedenen Tönen auf gewisse Weise einen Klang formten. ... Seien z.B. vier Gewichte von Hämmern gegeben, welche den folgenden Zahlen entsprechen: 12, 9, 8 und 6. Die Hämmer, welche die Gewichte 12 und 6 haben, klingen im doppelten Verhältnis der Oktave. Der Hammer aber mit dem Gewicht 12 zum Hammer mit dem Gewicht 9 (sowie der Hammer mit dem Gewicht 8 zum Hammer mit dem Gewicht 6) hinzugefügt, gibt eine Quarte im Verhältnis 4:3. Das Gewicht 9 aber zur 6 (und die 12 zur 8) mischt sich zur Quinte. (Boëthius, *De institutione musica*, I.10.)

Problem: Physikalisch falsch.

Die Eigenschwingung der Hämmer ist nicht hörbar, so daß die falsche so nicht aufgefunden werden konnte

Aufgabe 2. Nehmen wir (fälschlicherweise) an, die Anekdote von *Pythagoras in der Schmiede* wäre wahr und die Töne eines Hammers auf einem Amboß hätten Frequenzen, die proportional zum Gewicht des Hammers sind. (Hinweis. Dies ist eine physikalisch falsche Annahme!) In welchem Tonintervall klängen dann ein Hammer, der 12 Pfund wiegt, und ein Hammer, der 16 Pfund wiegt?

Pythagoräisches Prinzip

In der pythagoräischen Tradition ist dies aus Beobachtung (Spekulation) und der Zahlenmystik ∇ (τετρακτος) abgeleitet.

HARMONISCHE TONINTERVALLE
STEHEN IN KLEINEN
GANZZÄHLIGEN VERHÄLTNISSEN

Ein Tonintervall im Verh. $\frac{n}{m}$ ist
um so kleiner, desto kleiner
die Zahlen n & m sind.

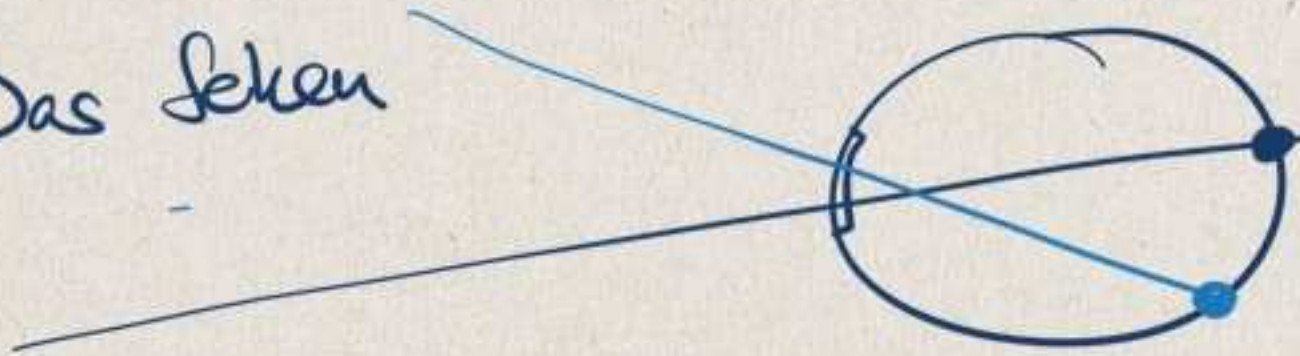
Ziel: Mathematischen Hintergrund
dieses Prinzips
verstehen.

Insbesondere: ∇ gibt es einen mathematischen
Hintergrund?

Anatomie

Sehen und Hören
funktionieren gänzlich anders.

Das Sehen



Retina: Stäbchen & Zapfen

→ Jeder Lichtdruck wird separat durch
eine Nervenzelle registriert und als
Einzel-Datenpunkt an das Gehirn
weitergeleitet.

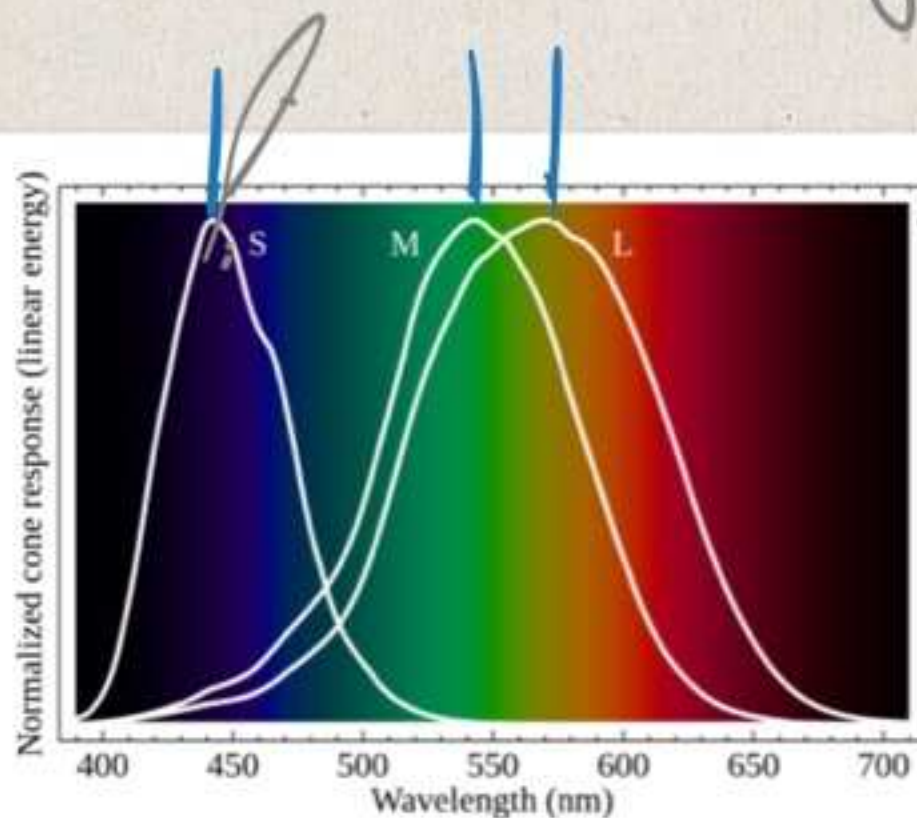


Abbildung 1: Absorptionsspektren der S-, M- und L-Zapfen im menschlichen Auge. Man erkennt, dass das Maximum der L-Zapfen nicht im roten, sondern im gelbgrünen Bereich liegt. Abbildung von wikimedia commons unter Verwendung von A. Stockman & L. T. Sharpe. Cone spectral sensitivities and color matching. In: K. Gegenfurtner & L. T. Sharpe (eds.), *Color vision: from genes to perception*. Cambridge University Press, pp. 53-87.

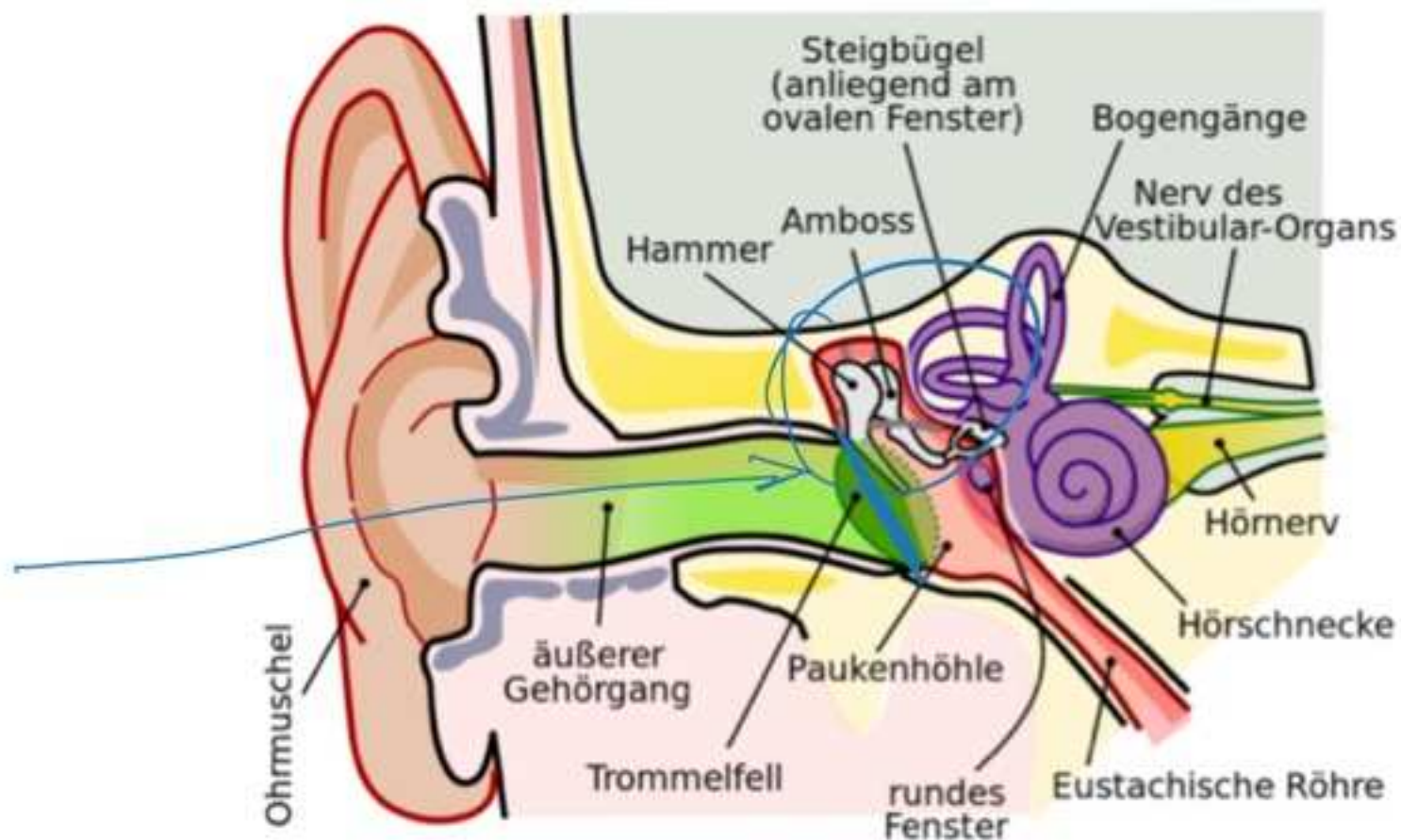


Abbildung 2: Das menschliche Ohr; aus L. Chittka, A. Brockmann, Perception Space—The Final Frontier, A PLoS Biology 3:4 (2005), e137.

Problem

Die Wahrnehmung im Ohr wird über die Schwingungen des Trommelfells vermittelt, so dass — in Gegensatz zu den Felsen — separate Töne nicht separat von den Nervenzellen gerastet, sondern als **SUPERPOSITION**.

Mathematisch gesehen: Summe der Einzelfunktionen.

z.B.

ist $f: x \mapsto f(x)$
die erste Schwingung und

$$g: x \mapsto g(x)$$

die zweite, so schwingt
das Tonmischfeld mit $f+g$.

$$f+g: x \mapsto f(x)+g(x).$$

Frage gibt man nur $f+g$, kann ich f
und g rekonstruieren?

Im allgemeinen nicht:

sagen wir $h(x) := 5x$

und wir wissen, daß $h(x) = f(x) + g(x)$,

dann gibt es keine eindeutige Lösung:

z.B. $f(x) = 2x$ & $g(x) = 3x$

oder $f(x) = x$ & $g(x) = 4x$.

Dies ist anders bei Schwingungen (d.h. Sinus-
koren): Fourier-Analyse.

Frage

Kann man aus
so einer Super-
position die
ursprünglichen
Töne zurückge-
winnen?