



Mathematik & Musik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	<i>Septem artes liberales</i>	3
1.2	Pythagoras und die Pythagoräer	4
1.3	Pythagoras und Harmonie	6
1.4	Das menschliche Gehör	9
2	Mathematischer Hintergrund	12
2.1	Vektorräume von Funktionen	12
2.2	Periodische, gerade und ungerade Funktionen	13
2.3	Trigonometrische Funktionen	16
2.4	Das Matrixexponential	19
2.5	Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	21
3	Schwingungen	23
3.1	Der harmonische Oszillator	23
3.2	Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung	24
3.3	Lösung der Gleichung für den harmonischen Oszillator	25
3.4	Schwebungen	27
4	Die Wellengleichung	30
4.1	D'Alemberts Methode	30
4.2	Die Bernoulli-Lösung	31
4.3	Frequenzberechnungen für Saiten	32
5	Fourieranalyse	35
5.1	Fourierreihen	35
5.2	Der Satz von Dirichlet	37
5.3	Das Spektrum	38
5.4	Spektren von Instrumenten	40
5.5	Die Quadratwelle	41
5.6	Gibbs-Phänomen	43
5.7	Die Shepard-Tonleiter	44

6	Harmonie	45
6.1	Wohlklänge & Psychoakustik	45
6.2	Oktavaufteilungen	47
6.3	Der Quintenzirkel und die Quintenspirale	50
6.4	Tonbezeichnungen und formale Tonleitern	55
6.5	Stimmungen	58
6.6	Cents	59
7	Stimmungen	61
7.1	Terzen	61
7.2	Dreiklänge	62
7.3	Reine Stimmungen	64
7.4	Die Eitz-Notation	65
7.5	Mitteltönige Stimmungen	67
7.6	Wohltemperierte Stimmungen	69
7.7	Charaktere der Tonarten	72

Mathematik und Musik sind eng miteinander verknüpft. In den *septem artes liberales* war die Musik eine der vier mathematischen Künste, da Harmonie, Stimmung und Rhythmus eine mathematische Theorie haben. Klassische mathematische Themen in der Musik sind die Harmonielehre, Stimmungen von Instrumenten und melodische Symmetrien. In der Veranstaltung *Mathematik & Musik* wird der Zusammenhang zwischen der harmonischen Schwingung, der Theorie der Obertöne und der Theorie der Harmonie in der Musik hergestellt und auf die Stimmungs- und Temperamentlehre angewendet.

Die Veranstaltung deckt einen kleinen Teil des Inhalts des hervorragenden Buchs *Music: A mathematical offering* von Dave Benson ab.¹ Dieses Buch ist die Inspiration für die Veranstaltung, welche Teile von Bensons Kapitel 1, 2 und 4, sowie den Großteil von Kapitel 5 behandelt.

1 Einleitung

1.1 *Septem artes liberales*

Über viele Jahrhunderte ist die Musik ein natürlicher Teil der Mathematik gewesen. In den Universitäten des Mittelalters gab es traditionellerweise vier Fakultäten: die propädeutische Artistenfakultät (*facultas artium*) und die drei höheren Fakultäten (Theologie, Jurisprudenz und Medizin), die auf einen gelehrten Beruf vorbereiteten. Studierende absolvierten erst das Studium der sieben freien Künste (*septem artes liberales*) in der Artistenfakultät, bevor sie an eine der höheren Fakultäten wechselten.

Die *septem artes liberales* wiederum teilten sich in zwei Gruppen auf: das *trivium*, von dem sich das heute in der Mathematik beliebte Wort „trivial“ ableitet, bestehend aus den grundlegenden Disziplinen Grammatik, Rhetorik und Logik, und das darauf folgende *quadrivium* mit den sogenannten vier mathematischen Künsten (*artes mathematicae*): Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Eines der Standardlehrwerke für die freie Kunst *Musik* war *De institutione musica* von Anicius Manlius Severinus Boëthius (ca. 480–524), der von Martin Grabmann als „der letzte Römer und der erste Scholastiker“ bezeichnet wurde.² Boëthius betont die Grenzrolle der Musik: sie ist eine der vier mathematischen Künste und somit eine der Künste, welche uns durch Abstraktion von der reinen Sinneswahrnehmung entfernen und rationales Argumentieren erlauben; und doch ist sie eng verknüpft mit Emotionen:

Nihil est enim tam proprium humanitatis, quam remitti dulcibus modis, adstringi contrariis.

Nichts ist menschlicher als durch süße Klänge zu entspannen und von widerstrebenden eingeengt zu werden. (Boëthius, *De institutione musica*, I.1.)

Boëthius argumentiert, daß die Musik zwar in der Sinneswahrnehmung begründet ist, aber ihre Theorie hauptsächlich rational und mathematisch ist:

¹David J. Benson. *Music: A mathematical offering*. Cambridge University Press, 2006.

²Martin Grabmann. *Die Geschichte der scholastischen Methode*. Erster Band. Die scholastische Methode von ihren ersten Anfängen in der Väterliteratur bis zum Beginn des 12. Jahrhunderts. Herdersche Verlags-handlung, 1909.

[I]ta proponimus, ut non omne iudicium sensibus demus, quamquam a sensu aurium huiusce artis sumatur omne principium. Sed principium quodam modo ... tenet auditus, postrema vero perfectio agnitionisque vis in ratione consistit. ... Haec igitur maxime causa fuit, cur relicto aurium iudicio Pythagoras ad regularum momenta migraverit.

Also schlagen wir vor, daß wir nicht alle Urteile den Sinnen überlassen, wenn auch die gesamte Grundlage dieser Kunst von Sinne des Ohrs herrührt. Aber diese Grundlage hält der Hörsinn in einer besonderen Weise; die wahre Perfektion und Kraft des Erkennens besteht aus der Vernunft. Dies war daher der Hauptgrund, weshalb Pythagoras, nachdem er das Urteil der Ohren ignoriert hatte, zur Bedeutung der Regeln weiterzog. (Boëthius, *De institutione musica*, I.9 & 10.)

Viele der Begriffe der Musiktheorie und insbesondere viele der Begriffe, die in dieser Veranstaltung eingeführt werden, tauchen bereits bei Boëthius auf und werden bei Boëthius auf Pythagoras zurückgeführt. Z.B. werden wir in § 6.4 zeigen, daß in der pythagoräischen Stimmung die Differenz zwischen einem Ganzton und zwei Halbtönen exakt ein sogenanntes *pythagoräisches Komma* ist; diese Rechnung findet sich in Buch IV.7 von *De institutione musica*. Einige Teile dieser Veranstaltung hätten bis auf das moderne Vokabular an einer mittelalterlichen Universität gelesen werden können.

Boëthius definiert *Konsonanz* als „*acuti soni gravisque mixtura suaviter uniformiterque auribus accidens*“ und *Dissonanz* als „*duorum sonorum sibimet permixtorum ad aurem veniens aspera atque iniucunda percussio*“.³ Diese Definition ist keine rein mathematische, sondern nimmt klaren Bezug zu ästhetischen Urteilen wie „*suaviter*“ und „*iniucunda*“. Emotionale Wirkung der Klänge und ihre musiktheoretischen Eigenschaften werden vermengt.

Die heutige Musikwissenschaft ist interdisziplinär und hat philologische, ästhetische, gesellschaftswissenschaftliche und auch naturwissenschaftliche Aspekte. Innerhalb des Bereichs der naturwissenschaftlichen Musikwissenschaft sind es die Physik, die menschliche Anatomie, die Mathematik und die kognitive Psychologie, die einen Beitrag zum Verständnis liefern: die Physik erläutert, wie Töne und Klänge erzeugt werden, wie sie sich durch die Luft bewegen und wie sie auf das menschliche Ohr treffen; die Anatomie erläutert, wie das Ohr diese Klänge aufnimmt und an das menschliche Gehirn weiterleitet; die Mathematik gibt uns dabei die zugrundeliegende Theorie der Repräsentation dieser Klänge; zu guter Letzt versucht die kognitive Psychologie zu erklären, wie und warum wir ästhetische Urteile über Klänge fällen und von Klängen emotional beeinflusst werden.

In dieser Veranstaltung wollen wir uns lediglich mit dem mathematischen (und ein wenig mit dem physikalischen) Teil dieses Fächerspektrums beschäftigen.

1.2 Pythagoras und die Pythagoräer

Pythagoras von Samos (ca. 570–495 v. Chr. Geb.) ist für Mathematikerinnen und Mathematiker ein bekannter Name. Es gibt keinerlei zeitgenössische Quellen über das Leben des Pythagoras und keine überlieferten Schriften; er kam von der griechischen Insel Samos und gründete

³Boëthius, *De institutione musica*, I.8: „Eine Mischung eines hohen und eines tiefen Tons, welche angenehm und gleichförmig auf die Ohren fallen“ und „ein rauher und unerfreulicher Zusammenschlag zweier Töne, die miteinander vermischt zum Ohr kommen.“

um ca. 530 v. Chr. Geb. eine Schule in Kroton in den griechischen Kolonien Süditaliens. Aus dieser Schule entstand eine auch politisch einflußreiche Bewegung, die sogenannten Pythagoräer, unter denen der Schulgründer Pythagoras in Legenden und Mythen überhöht wurde. Dies macht es sehr schwer, historische Tatsachen über das Leben des Pythagoras zu ermitteln, da sie in den Berichten mit diesen Legenden und Mythen verschwimmen. Die ersten überlieferten Biographien stammen aus der Spätantike, z.B. die Schrift *Φιλοσόφων βίων καὶ δογμάτων συναγωγή* von Diogenes Laertios (3. Jhdt. n. Chr. Geb.), also etwa achthundert Jahre nach der Lebenszeit des Pythagoras.

Die Pythagoräer waren eine monastische Gemeinschaft, deren Anhänger überzeugt waren, daß die Welt durch Zahlenverhältnisse erklärt werden kann. Zahlenmystik und asketische Ideale (dazu gehörten Schweigepflichten, die vegetarische Lebensweise und das Verbot, Bohnen zu essen) spielten eine große Rolle für die Pythagoräer. Die Überhöhung des Kultgründers führte zu zahlreichen hagiographischen Legenden über Pythagoras, die vermutlich nichts mit der historischen Person zu tun haben. Z.B. wurde behauptet, daß Pythagoras einen goldenen Schenkel gehabt habe, mit Tieren sprechen konnte und an zwei Orten zur gleichen Zeit sein konnte.

Dementsprechend sind auch die meisten Zuschreibungen von Erkenntnissen, Glaubenssätzen oder Aussagen (u.a. auch die Zuschreibung des Satzes von Pythagoras) ohne belegbare historische Grundlage. Wir haben Quellen, die die Pythagoräer und ihre Positionen beschreiben, und auch diese sind nicht immer vollständig klar oder glaubhaft. Eine wichtige Quelle sind die sogenannten *Goldenen Verse* (*χρυσᾶ ἔπη* / *carmen aureum*), allerdings ist die Datierung der Goldenen Verse umstritten und schwankt zwischen der Lebzeit des Pythagoras und dem vierten nachchristlichen Jahrhundert. Unter den Pythagoräern finden sich Wissenschaftler und Mathematiker, wie z.B. Hippias von Metapont, der üblicherweise als Urheber des Irrationalitätsbeweises für $\sqrt{2}$ genannt wird.

Die heutige historische Forschung kennt zwei grundsätzlich verschiedene Thesen: die sogenannte *Schamanismusthese* und die *Wissenschaftsthese*. Nach der Schamanismusthese von Walter Burkert (1931–2015) handelte es sich bei Pythagoras ausschließlich um einen Kultgründer, der einen mythischen Kult um Zahlensymbolik aufbaute, der den schamanistischen Kulte in anderen Kulturen entsprach; die pythagoräische Schule war ursprünglich keine wissenschaftliche, sondern eine religiös-mystische Institution; die wichtigen wissenschaftlichen Beiträge waren eine Neuerung nach dem Tode des Sektengründers.⁴ Die der Schamanismusthese entgegengesetzte Wissenschaftsthese (nach Leonid Zhmud) hält hingegen die Beschreibungen der Schule als mystischen Kult für eine spätere Entwicklung und geht davon aus, Pythagoräer der Frühzeit einen Zusammenschluß von Forschern war.

Vor dem Hintergrund dieser Kontroverse können wir nichts oder nur sehr wenig über die historische Entwicklung der pythagoräischen Musiktheorie sagen: auch wenn bestimmte Grundprinzipien bereits in antiker Zeit den Pythagoräern zugeschrieben werden, wissen wir nicht, ob diese Zuschreibungen sich auf den Kultgründer Pythagoras beziehen oder auf spätere Pythagoräer. Direkte Bezüge auf die Person des Pythagoras wie Boëthius' Zitat „*haec igitur maxime causa fuit, cur relicto aurium iudicio Pythagoras ad regularum momenta migraverit*“ sollten somit vorsichtig als Bezug auf die gesamte Pythagoräerbewegung unter Einschluß der

⁴Walter Burkert. *Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Erlanger Beiträge zur Sprach- und Kunstwissenschaft, Band 10. Hans Carl, 1962.

neopythagoräischen Bewegung in der römischen Kaiserzeit gelesen werden.

Die vorsokratischen milesischen Philosophen Thales (ca. 625–545 v. Chr. Geb.), Anaximander (ca. 610–546 v. Chr. Geb.) und Anaximenes von Milet (ca. 585–525 v. Chr. Geb.) benannten jeweils ein Grundprinzip (ἀρχή) für die Beschaffenheit der Welt: das Wasser (Thales), das Unendliche (ἄπειρον; Anaximander) und die Luft (Anaximenes). In gleicher Weise wird der pythagoräischen Schule der Grundlehrsatz „Alles ist Zahl“ zugeschrieben.

[Ο]ἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἀψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ... τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾤκηθησαν εἶναι. ἐπεὶ δὲ τούτων οἱ ἀριθμοὶ φύσει πρῶτοι ..., ἔτι δὲ τῶν ἀρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους, ἐπεὶ δὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιωθῆναι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἀρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμὸν.

Die sogenannten Pythagoräer befaßten sich mit Mathematik und waren die ersten, die dies taten; und sie glaubten, daß die mathematischen Grundprinzipien die Grundprinzipien der Welt sind. Und da die Zahlen natürlicherweise die ersten mathematischen Grundprinzipien sind ... (sie sahen auch die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonien in den Zahlen) und da es offensichtlich war, daß die gesamte Natur in den Zahlen repräsentiert ist und daß die Zahlen die ersten Grundprinzipien der Natur sind, nahmen sie an, daß die Elemente der Zahlen die Elemente von allem sind und daß die gesamte Welt eine Harmonie und eine Zahl ist. (Aristoteles, Metaphysik A 985b–986a)

Diese Zuschreibung wird von Zhmud bezweifelt, der die Doktrin „Alles ist Zahl“ für eine anachronistische (neopythagoräische und neoplatonistische) Neuerung hält; er verweist explizit auf Iamblichus (ca. 245–325 n. Chr. Geb.) als Urheber dieser Philosophie.⁵

Für den Unterricht der Musik im Quadrivium der mittelalterlichen Universität sind die historischen Begebenheiten immateriell: in Boëthius' *De institutione musicae* findet sich eine spätantike Darstellung der pythagoräischen Philosophie, keine historische Analyse. Im aristotelischen Zitat taucht das Wort ἀρμονία mehrfach auf, von ἀρμύζω, „zusammenfügen“. In der spätantiken Überlieferung der pythagoräischen Lehre entwickelt sich der Zusammenhang zwischen ἀρμονία und ἀριθμός zu einem fundamentalen Gründungsnarrativ der pythagoräischen Philosophie: wenn ein so ostentativ ästhetisch und emotional geprägtes Phänomen wie die Musik durch Zahlverhältnisse beschrieben werden kann, dann muß die Zahl der Grundordnung des Universums zugrundeliegen.

1.3 Pythagoras und Harmonie

Haben wir Saiten der Länge ℓ , die mit der Frequenz ν schwingen und halbieren wir eine Saite, so daß an ihrer Stelle nun zwei Saiten der Länge $1/2\ell$ vorliegen, so schwingen die beiden Teile

⁵Leonid Ja. Zhmud. „All is number“? „Basic doctrine“ of Pythagoreanism reconsidered. *Phronesis* 34:3 (1989): 270–292: „Aristotle certainly used the doctrines of some later Pythagoreans, but relying on them he created a number philosophy such as had never existed in Pythagoreanism. ... The teachings of early Pythagoreans are strongly resistant to being connected with the number doctrine. ... If Pythagoras really asserted that ‘all is number’, his followers do not at all look like adherents persistently repeating what ‘he himself said’. (S. 283)“

der halbierten Saite mit Frequenz 2ν . Die Töne mit Frequenz ν und 2ν klingen sehr ähnlich, sogar fast gleich. Der Unterschied zwischen diesen Tönen wird als *Oktave* bezeichnet (der griechische Begriff bei Boëthius heisst *diapason*) und wir empfinden den Ton üblicherweise als „den gleichen Ton in unterschiedlichen Höhenlagen“. Wir kennen dies aus dem Chor, wenn die Männerstimmen eine Oktave tiefer singen als die Frauenstimmen. Dies nennt man *unisono*, also „mit einer Stimme“.

Teilen wir die Saite in drei gleiche Teile, so schwingen alle drei Teile mit Frequenz 3ν . Vergleichen wir die entstehenden Töne mit Frequenz ν , 2ν und 3ν , so stellt sich heraus, dass der letzte Ton nicht in gleicher Weise als „der gleiche Ton“ empfunden wird, aber der Zusammenklang von Tönen der Frequenz 2ν und 3ν als wohlklingend empfunden wird.

Vierteln wir nun die Saite, so erhalten wir einen Ton mit Frequenz 4ν : dieser ist eine Oktave höher als 2ν , d.h. wir empfinden 2ν und 4ν als „denselben Ton in verschiedenen Höhenlagen“ und der Zusammenklang der Töne mit Frequenzen 3ν und 4ν wird als wohlklingend empfunden. Wir nennen die entstehenden Tonintervalle $\nu : 2\nu$ *Oktave* (*diapason*), $2\nu : 3\nu$ *Quinte* (*diapente*) und $3\nu : 4\nu$ *Quarte* (*diatessaron*).

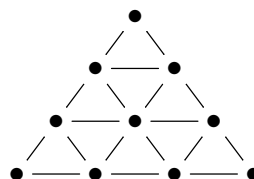
Aufgabe 1. Angenommen, wir haben einen Ton mit Frequenz 260 Hz und seine Oktave mit Frequenz 520 Hz. Welche Frequenz hat der Ton, der eine Quinte unterhalb des oberen der beiden Töne liegt? Was ist das Tonintervall zwischen diesem Ton und dem unteren der beiden ursprünglichen Töne (260 Hz)?

Diese Beziehung zwischen Zahlenverhältnissen und Wohlklang ist Teil des Gründungsnarrativs der pythagoräischen Schule. Die genannten Tonintervalle, welche die Verhältnisse zwischen den Zahlen 1, 2, 3 und 4 verwenden, werden als die *wohlklingenden* oder *harmonischen Tonintervalle* identifiziert.

Omnis musicae consonantiae aut in duplici aut in triplici aut in quadrupla aut in sesquialtera aut in sesquitertia proportionem consistant; et vocabitur quidem, quae in numeris sesquitertia, diatessaron in sonis, quae in numeris sesquialtera, diapente appellatur in vocibus, quae vero in proportionibus dupla est, diapason in consonantiis.

Alle Konsonanzen der Musik bestehen entweder aus einem Verhältnis 2:1 oder 3:1 oder 4:1 oder 3:2 oder 4:3; und man nennt, was dem Verhältnis 4:3 in Zahlen entspricht, *diatessaron* (Quarte) in Tönen, was dem Verhältnis 3:2 entspricht, *diapente* (Quinte), was aber im Verhältnis doppelt ist, *diapason* (Oktave). (Boëthius, *De institutione musica*, I.7.)

Die besondere Rolle der Zahlen 1, 2, 3 und 4 wird in der späteren pythagoräischen Zahlenmystik im mystischen Symbol der τετρακτύς (auch als *mystische Tetraade* bezeichnet), welche andeutet, wie die *perfekte Zahl* 10 aus den Zahlen 1, 2, 3 und 4 entsteht:



Die Goldenen Verse geben der τετρακτύς eine besondere Stellung, da sie im sogenannten *pythagoräischen Eid*, einem Schwur auf den Sektengründer explizit erwähnt wird: „Ναὶ μὲν τὸν ἡμετέραν ψυχᾷ παραδόντα τετρακτὺν”.⁶

Eine andere Form des Gründungsnarrativs ist die Anekdote von „Pythagoras in der Schmiede“; diese Anekdote ist ebenfalls erst in spätantiken Quellen zu finden. Nach dieser Anekdote kam Pythagoras an einer Schmiede vorbei, in der vier Schmiede mit vier verschiedenen Hämmern mit Gewichten im Verhältnis 6:8:9:12 arbeiteten. Pythagoras beobachtete, daß die Hämmer Töne unterschiedlicher Tonhöhe hervorriefen, die harmonische Tonintervalle ergaben. Wir finden diese Anekdote in Boëthius:

[P]raeteriens fabrorum officinas pulsos malleos exaudit ex diversis sonis unam quodam modo concinentiam personare. ... [S]int verbi gratia malleorum quattuor pondera, quae subter scriptis numeris contineantur: XII, VIII, VIII, VI. Hi igitur mallei, qui XII et VI ponderibus vergebant, diapason in duplo concinentiam personabant. Malleus vero XII ponderum ad malleum VIII et malleus VIII ponderum ad malleum VI ponderum secundum epitritam proportionem diatessaron consonantia iungebatur. VIII vero ponderum ad VI et XII ad VIII diapente consonantiam permiscebant.

Als er an der Schmiede vorbeikam, hörte er wie die Schläge der Hämmer aus verschiedenen Tönen auf gewisse Weise einen Klang formten. ... Seien z.B. vier Gewichte von Hämmern gegeben, welche den folgenden Zahlen entsprechen: 12, 9, 8 und 6. Die Hämmer, welche die Gewichte 12 und 6 haben, klangen im doppelten Verhältnis der Oktave. Der Hammer aber mit dem Gewicht 12 zum Hammer mit dem Gewicht 9 (sowie der Hammer mit dem Gewicht 8 zum Hammer mit dem Gewicht 6) hinzugefügt, gaben eine Quarte im Verhältnis 4:3. Das Gewicht 9 aber zur 6 (und die 12 zur 8) mischten sich zur Quinte. (Boëthius, *De institutione musica*, I.10.)

In moderner mathematischer Notation erhalten wir die Verhältnisse $12/6$, also $2 : 1$ (*Oktave*), $12/9 = 8/6$, also $4 : 3$ (*Quarte*) und $12/8 = 9/6$, also $3 : 2$ (*Quinte*). Ein wesentliches Problem mit dieser Anekdote ist, daß sie physikalisch inkorrekt ist: die Schwingungsfrequenz des Hammers, der auf einen Amboß trifft, ist zwar proportional zu seinem Gewicht, aber diese Frequenz ist im Ultraschallbereich und kann nicht vom menschlichen Ohr wahrgenommen werden.

Aufgabe 2. Nehmen wir (fälschlicherweise) an, die Anekdote von *Pythagoras in der Schmiede* wäre wahr und die Töne eines Hammers auf einem Amboß hätten Frequenzen, die proportional zum Gewicht des Hammers sind. (*Hinweis.* Dies ist eine physikalisch falsche Annahme!) In welchem Tonintervall klängen dann ein Hammer, der 12 Pfund wiegt, und ein Hammer, der 16 Pfund wiegt?

Die historischen Fragen, wie und von wem die akustischen Beobachtungen gemacht wurden und ob die Zuschreibung dieser Positionen zu Pythagoras oder sogar allgemein den frühen Pythagoräern angemessen ist, müssen offen bleiben. Aber diese zahlenbasierten harmonischen

⁶ „Ja, bei dem, der unseren Seelen die τετρακτύς gegeben hat.“

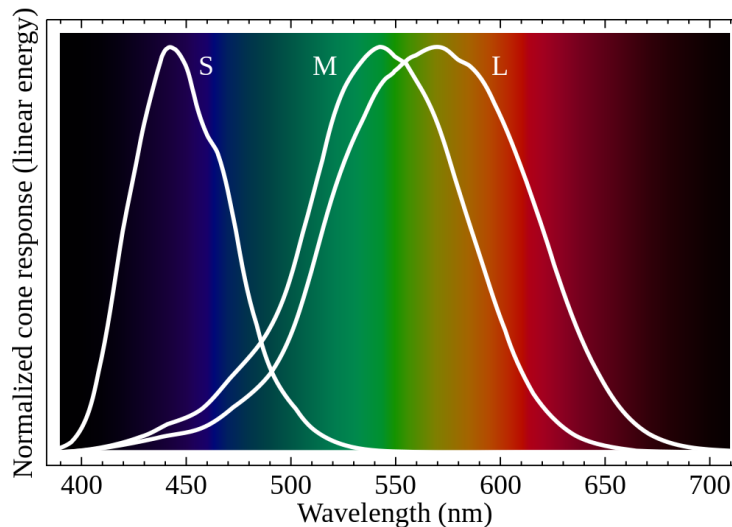


Abbildung 1: Absorptionsspektren der S-, M- und L-Zapfen im menschlichen Auge. Man erkennt, dass das Maximum der L-Zapfen nicht im roten, sondern im gelbgrünen Bereich liegt. Abbildung von wikimedia commons unter Verwendung von A. Stockman & L. T. Sharpe. Cone spectral sensitivities and color matching. In: K. Gegenfurtner & L. T. Sharpe (eds.), *Color vision: from genes to perception*. Cambridge University Press, pp. 53–87.

Grundregeln sind die Grundlage dessen, was in Boëthius und damit dann auch im mittelalterlichen Unterricht des Quadrivium als pythagoräische Doktrin vermittelt wurde. Die auf den akustischen Beobachtungen basierende Grundregel ist:

„Harmonische Tonintervalle stehen in kleinen ganzzahligen Verhältnissen“

oder, relativ formuliert,

„Ein Tonintervall im Zahlenverhältnis $n : m$ ist um so harmonischer, desto kleiner die ganzen Zahlen n und m sind“.

Wir wollen diese Grundregel als das *pythagoräische Prinzip* bezeichnen. Der erste Teil dieser Veranstaltung wird uns die mathematische Erklärung für das pythagoräische Prinzip liefern.

1.4 Das menschliche Gehör

Beim Sehen trifft Licht mit einer spezifischen Frequenz, welche die Farbe des Lichtes bestimmt, zunächst auf unsere Linse und dann auf die *Retina* oder *Netzhaut*, auf der ein gespiegeltes Abbild der Lichteindrücke dargestellt wird. Auf der Retina wird dieses Abbild erzeugt durch die *Photorezeptorzellen*, die registrieren, ob an einer Stelle der Retina ein Lichteindruck einer vorgegebenen Frequenz eingetroffen ist. Wir haben zwei Arten von Photorezeptoren, *Stäbchen*, welche für das skotopische Sehen bei geringer Helligkeit zuständig sind, und *Zapfen*, welche für das Farbsehen zuständig sind. S-Zapfen decken den blauen Bereich ab (Absorptionsmaximum bei ca. 420 nm), M-Zapfen den grünen (Absorptionsmaximum bei ca. 534 nm) und die L-Zapfen den roten (Absorptionsmaximum bei ca. 563 nm; vgl. Abb. 1). Diese

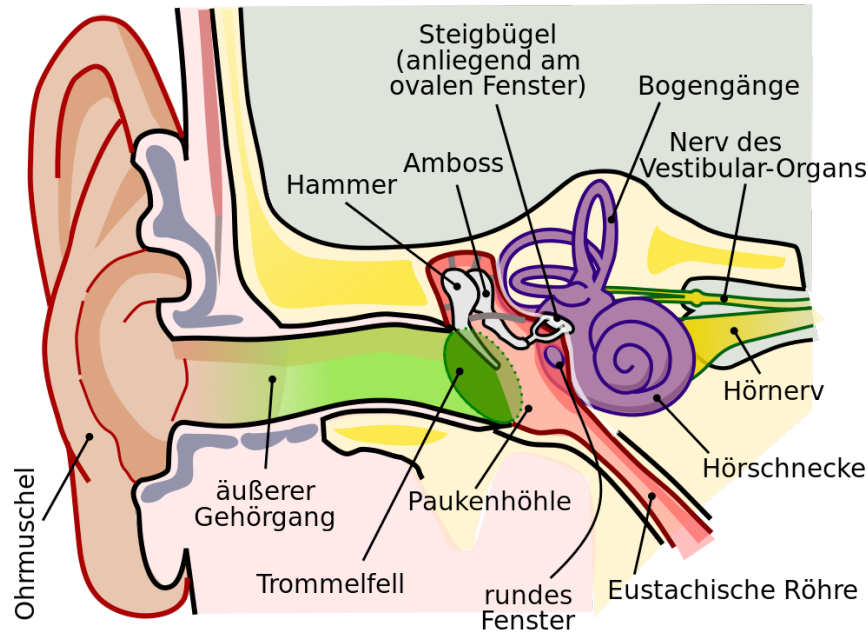


Abbildung 2: Das menschliche Ohr; aus L. Chittka, A. Brockmann, Perception Space—The Final Frontier, A PLoS Biology 3:4 (2005), e137.

Nervenzellen leiten dann das so kodierte zweidimensionale Abbild des Lichteindrucks an das Gehirn weiter. Insbesondere werden ein blauer Lichteindruck auf der einen Seite der Retina und ein gelber Lichteindruck auf der anderen Seite der Retina durch klar von einander getrennte Nervensignale an das Gehirn weitergegeben, wobei die Wellenlänge des Lichts (also die Farbe) gesondert durch dieses Signal ausgewiesen ist.

Das menschliche Gehör funktioniert nach einem gänzlich anderen Prinzip. Schallwellen sind mechanische Wellendeformationen in der Luft, die an der Grenze des Mittelohrs auf das *Trommelfell* treffen, welches durch sie in Schwingung versetzt wird (vgl. Abb. 2). Diese Schwingung wird mittels der Gehörknöchelchen *Hammer/Malleus* und *Amboß/Incus* auf die Fußplatte des *Steigbügels* übertragen, die das *ovale Fensters* oder *Vorhoffenster*, welches das Mittelohr mit dem Innenohr verbindet, berührt. So wird die Schwingung auf die Flüssigkeit im Inneren der *Hörschnecke/Cochlea* übertragen. Die *Haarzellen* auf der *Basilar-membran* im *Schneckengang* wandeln dann diese Schwingung in Nervenimpulse um, die an das Gehirn weitergegeben werden.

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Abbild des Lichteindrucks auf der Retina ist hier der gesamte Höreindruck in einer einzigen Schwingung repräsentiert. Treffen zwei separate Klänge auf das Ohr, so werden sie in einer Schwingung zusammengefaßt, die dann das Trommelfell zum Schwingen bringt und über den beschriebenen Ablauf als Nervenimpuls an das Gehirn weitergeleitet wird.

Da der gesamte Höreindruck in einer einzigen Schwingung repräsentiert ist, stellt sich die Frage, wie es möglich ist, daß unser Ohr oder unser Gehirn rekonstruieren kann, aus welchen Einzelklängen sich dieser Höreindruck zusammensetzte.

Mathematisch gesprochen: falls zwei Klänge den Schwingungsfunktionen f und g entsprechen, welche beim gemeinsamen Eintreffen auf dem Trommelfell zu einer gemeinsamen Funktion h zusammengefaßt werden, wie ist es möglich, aus der Funktion h zu rekonstruieren, was f und g waren? Im allgemeinen kann eine solche Rekonstruktionsfähigkeit nicht erwarten: nehmen wir an, daß $h(x) = 5x$ und daß h durch Addition zweier linearer Funktionen entstanden ist, also

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

mit $f(x) = ax$ und $g(x) = bx$, so reicht diese Information nicht aus, um a und b eindeutig zu bestimmen: sowohl $a = 2$ und $b = 3$ als auch $a = 1$ und $b = 4$ und viele andere Wahlen von a und b geben korrekte Antworten.

Es wird sich herausstellen, daß Schwingungen Sinusfunktionen der Form $f(x) = \sin(\nu x)$ sind (Kapitel 3) und daß wir unter geeigneten Annahmen aus einer Funktion der Form $\sin(\nu x) + \sin(\mu x)$ die Koeffizienten ν und μ rekonstruieren können (Kapitel 5).

2 Mathematischer Hintergrund

In diesem Kapitel wiederholen wir den mathematischen Hintergrund zu Vektorräumen von Funktionen, periodischen, geraden, ungeraden und trigonometrischen Funktionen und Differentialgleichungen, welche aus den Grundvorlesungen bekannt sein sollten und für die folgenden Kapitel benötigt werden.

2.1 Vektorräume von Funktionen

Wir bezeichnen die Menge $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf den reellen Zahlen als den *Raum aller Funktionen*. Diese Menge bildet einen *Vektorraum* mit den folgenden Verknüpfungen: falls $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so setzen wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ und} \\ (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Die erste Verknüpfung ist die *punktweise Addition*, die zweite ist die *punktweise skalare Multiplikation*. Der Nullvektor in diesem Vektorraum ist die konstante Funktion $\mathbf{0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{0}(x) := 0$. Dieser Vektorraum ist kein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$; er kann nicht einmal eine abzählbare Basis haben.⁷

Eine Teilmenge $F \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bildet einen *Untervektorraum*, falls sie unter den beiden Verknüpfungen abgeschlossen ist. Beispiele sind die stetigen Funktionen, die stetig differenzierbaren Funktionen oder die glatten Funktionen.

Aufgabe 3. Ist $(V, +)$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so definieren wir die folgenden Operationen auf der Menge aller n -Tupel von Vektoren aus V : $(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) := (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$ und $\lambda \cdot (v_1, \dots, v_n) := (\lambda \cdot v_1, \dots, \lambda \cdot v_n)$. Zeigen Sie, daß V^n mit diesen Operationen einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum bildet. Welche Dimension hat V^n , wenn $\dim(V) = m$?

Satz 1. Die Menge $\{\sin, \cos\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear unabhängig.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass keine nichttriviale Linearkombination von $\sin$ und $\cos$ den Nullvektor ergeben kann. Nehmen wir also an, dass

$$\lambda \sin + \mu \cos = \mathbf{0} \tag{1}$$

und zeigen, daß unter dieser Annahme $\lambda = \mu = 0$ sein muß. Die Funktionsgleichung (1) besagt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss:

$$\lambda \cdot \sin(x) + \mu \cdot \cos(x) = 0. \tag{2}$$

⁷Schlimmer noch: eine Basis dieses Vektorraums muß mehr Elemente haben als es reelle Zahlen gibt. Was diese Aussage bedeutet und wie man sie beweist, wird z.B. in der Vorlesung *Mathematische Logik & Mengenlehre*, üblicherweise im Sommersemester angeboten, erläutert.

Setzen wir in (2) den Wert $x = 0$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \cdot \sin(0) + \mu \cdot \cos(0) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \\ &= 0 + \mu = \mu, \end{aligned}$$

also muß $\mu = 0$ sein. Setzen wir in (2) nun $x = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \\ &= \lambda + 0 = \lambda, \end{aligned}$$

also ist auch $\lambda = 0$.

Q.E.D.

Aufgabe 4. Seien $f(x) := \sin(x)$, $g(x) := \sin(2x)$ und $h(x) := \sin(3x)$. Zeigen Sie, daß die Mengen $\{f, g\}$ und $\{f, g, h\}$ linear unabhängige Teilmengen des Vektorraums $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

2.2 Periodische, gerade und ungerade Funktionen

Periodische Funktionen. Eine Funktion f heißt *periodisch mit Periode L* , falls für alle x gilt, daß $f(x) = f(x + L)$.

Satz 2. Sei $L > 0$. Die Funktionen mit Periode L bilden einen Untervektorraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweis. Wir müssen zeigen: wenn f und g periodisch mit Periode L sind, so auch $f + g$ und λf . Dies ergibt sich unmittelbar aus den folgenden Rechnungen.

$$\begin{aligned} (f + g)(x + L) &= f(x + L) + g(x + L) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= (f + g)(x) \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(x + L) &= \lambda \cdot f(x + L) \\ &= \lambda \cdot f(x) \\ &= (\lambda f)(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 3. Sei $k > 0$ eine natürliche Zahl. Jede periodische Funktion mit Periode L ist auch periodisch mit Periode kL .

Beweis. Sei f periodisch mit Periode L . Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach k . Der Fall $k = 1$ ist trivial. Angenommen, die Behauptung ist für k bewiesen, also gilt für alle x , daß $f(x + kL) = f(x)$. Dann ist

$$f(x + (k + 1)L) = f(x + (kL + L)) = f((x + kL) + L) = f(x + L) = f(x).$$

Q.E.D.

Lemma 4. Sei $a > 0$ und sei f eine periodische Funktion mit Periode L . Dann ist $x \mapsto f(ax)$ eine periodische Funktion mit Periode L/a .

Beweis. Wir schreiben $g(x) := f(ax)$. Es gilt

$$g(x + L/a) = f(a(x + L/a)) = f(ax + L) = f(ax) = g(x).$$

Q.E.D.

Falls f und g Funktionen sind, so definieren wir das Produkt von f und g punktweise, also $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

Lemma 5. Falls f und g periodisch mit Periode L sind, so auch $f \cdot g$.

Beweis. Wir rechnen aus: $(f \cdot g)(x + L) = f(x + L) \cdot g(x + L) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$. Q.E.D.

Das folgende Lemma folgt aus grundlegenden Eigenschaften des Integrals.

Lemma 6. Ist h periodisch mit Periode L und integrierbar, so gilt für jedes y , daß

$$\int_0^L h(x) \, dx = \int_y^{L+y} h(x) \, dx.$$

Beweis. Die Periodizität impliziert unmittelbar, daß $\int_0^y h(x) \, dx = \int_L^{L+y} h(x) \, dx$. Durch Aufspaltung des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^L h(x) \, dx &= \int_0^y h(x) \, dx + \int_y^L h(x) \, dx \\ &= \int_L^{L+y} h(x) \, dx + \int_y^L h(x) \, dx \\ &= \int_y^L h(x) \, dx + \int_L^{L+y} h(x) \, dx = \int_y^{L+y} h(x) \, dx. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Gerade & ungerade Funktionen. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls für alle x gilt, daß $f(x) = f(-x)$; sie heißt *ungerade*, falls für alle x gilt, daß $f(x) = -f(-x)$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß die Funktion $f(\vartheta) := \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)$ weder gerade noch ungerade, aber 2π -periodisch ist.

Satz 7. Sowohl die geraden als auch die ungeraden Funktionen bilden einen Untervektorraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweis. Wir beschränken uns auf die geraden Funktionen. Seien g und h gerade Funktionen; wir müssen zeigen, daß $g + h$ und λg auch gerade sind. Wir haben

$$\begin{aligned} (g + h)(-x) &= g(-x) + h(-x) = g(x) + h(x) = (g + h)(x) \text{ und} \\ (\lambda g)(-x) &= \lambda \cdot g(-x) = \lambda \cdot g(x) = (\lambda g)(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, daß die ungeraden Funktionen auch einen Untervektorraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden, um den Beweis von Satz 7 zu vervollständigen.

Lemma 8. Die Nullfunktion $\mathbf{0}$ ist die einzige Funktion, welche sowohl gerade als auch ungerade ist.

Beweis. Die Zahl 0 ist die einzige reelle Zahl x mit $x = -x$. Falls f sowohl gerade als auch ungerade ist, so erhalten wir, daß

$$f(-x) = f(x) = -f(-x),$$

also ist $f(-x) = 0$ für alle x , und somit $f = \mathbf{0}$.

Q.E.D.

Satz 9. Für jede Funktion f gibt es eindeutig bestimmte g und h , so daß g gerade ist, h ungerade ist und $f = g + h$.

Beweis. Setze $g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ und $h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Offensichtlich gilt

$$(g+h)(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Wir zeigen zunächst, daß g gerade ist und daß h ungerade ist.

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \text{ und} \\ -h(-x) &= -\frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{-f(-x) + f(x)}{2} = h(x). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 8: angenommen, $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$, wobei g_1 und g_2 gerade und h_1 und h_2 ungerade sind. Durch Subtrahieren von g_2 und h_1 erhalten wir $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$. Nach Satz 7 ist aber $g_1 - g_2$ gerade und $h_2 - h_1$ ungerade, also gilt nach Lemma 8, daß $g_1 - g_2 = h_2 - h_1 = \mathbf{0}$.

Q.E.D.

Die Begriffe „gerade“ und „ungerade“ verhalten sich bzgl. Multiplikation bei Funktionen ebenso wie bei Zahlen.

Satz 10. Falls f_1, f_2 ungerade und g_1, g_2 gerade Funktionen sind, so sind $f_1 \cdot f_2$ und $g_1 \cdot g_2$ gerade, sowie $f_i \cdot g_j$ (für $i, j \in \{1, 2\}$) ungerade.

Beweis. Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot f_2)(-x) &= f_1(-x) \cdot f_2(-x) \\ &= f_1(x) \cdot f_2(x) \\ &= (f_1 \cdot f_2)(x), \\ (g_1 \cdot g_2)(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x) \\ &= -g_1(x) \cdot -g_2(x) \\ &= (g_1 \cdot g_2)(x) \text{ und} \\ (f_i \cdot g_j)(-x) &= f_i(-x) \cdot g_j(-x) \\ &= f_i(x) \cdot -g_j(x) \\ &= -(f_i \cdot g_j)(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Wie im Falle von Lemma 6 folgt die folgende Behauptung aus elementaren Eigenschaften des Integrals:

Lemma 11 (ohne Beweis). Ist h ungerade und integrierbar, so gilt für jedes y

$$\int_{-y}^y h(x) \, dx = 0.$$

Korollar 12. Ist h eine ungerade Funktion mit Periode L und integrierbar, so gilt

$$\int_0^L h(x) \, dx = 0.$$

Beweis. Nach Lemma 6 gilt, daß $\int_0^L h(x) \, dx = \int_{-L/2}^{L/2} h(x) \, dx$. Letzteres aber ist gleich null nach Lemma 11. Q.E.D.

2.3 Trigonometrische Funktionen

Wir tragen in diesem Abschnitt bekannte Tatsachen über trigonometrische Funktionen ohne Beweis zusammen.

Die trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind über unendliche Reihen definiert, die einen engen Zusammenhang mit der *Exponentialfunktion* herstellen. Wir definieren

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (3)$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ sowie} \quad (4)$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5)$$

Wir betrachten unter anderem trigonometrische Funktionen der Form $x \mapsto \lambda \cdot \sin(2\pi\nu x + \alpha)$ und $x \mapsto \lambda \cdot \cos(2\pi\nu x + \alpha)$. In dieser Notation nennen wir λ die *Amplitude* der Funktion, ν die *Frequenz* der Funktion und α die *Phase* der Funktion. Eine Funktion der Form $x \mapsto \sin(2\pi\nu x) \cdot \sin(2\pi\mu x)$ oder $x \mapsto \sin(2\pi\nu x) \cdot \cos(2\pi\mu x)$ nennen wir auch eine Sinusfunktion mit Frequenz ν , welche durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion mit Frequenz μ *moduliert* ist (s. Abb. 3).

Eine trigonometrische Funktion f ist eine *Phasenverschiebung* einer anderen Funktion g , falls $f(x) = g(x + \alpha)$ für eine Phase α ist. Insbesondere sind Sinus und Kosinus Phasenverschiebungen voneinander:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Sinus und Kosinus sind periodisch mit Periode 2π . Phasenverschiebung und Veränderung der Amplitude erhalten die Periode; nach Lemma 4 ist die Erhöhung der Frequenz umgekehrt

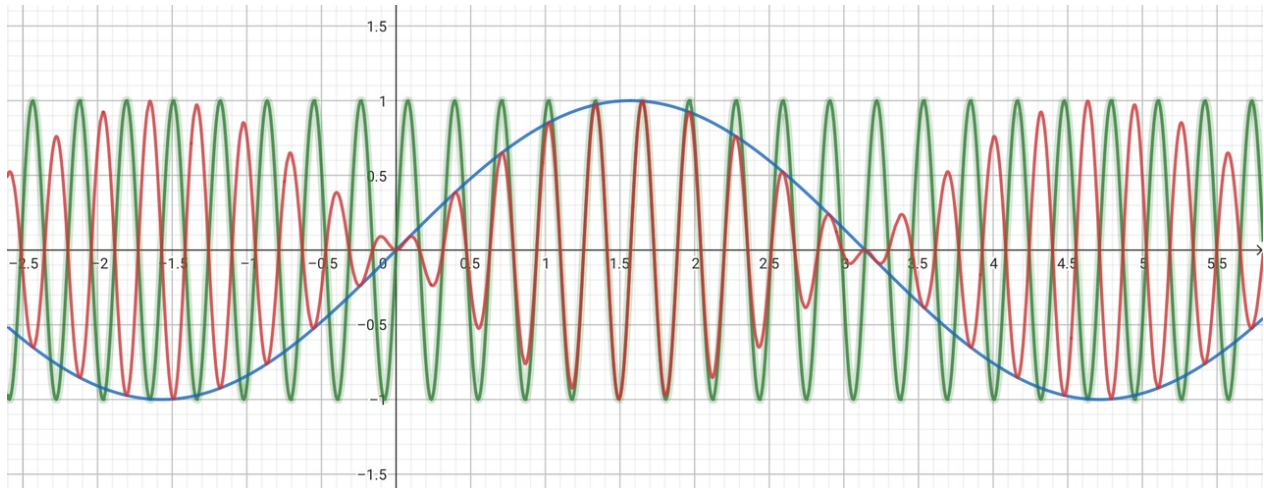


Abbildung 3: Die grün gezeichnete Funktion $f(x) = \sin(20x)$ wird durch die blau gezeichnete Funktion $g(x) = \sin(x)$ zur rot gezeichneten Funktion $f(x) \cdot g(x)$ moduliert.

proportional zur Verringerung der Periode: die Funktionen $x \mapsto \sin(\nu x)$ und $x \mapsto \cos(\nu x)$ haben Periode $2\pi/\nu$. Nach Lemma 3 bedeutet dies, daß für jedes k die Funktion $x \mapsto \sin(k\nu x)$ Periode $2\pi/\nu$ hat.

Leiten wir den Sinus ab, so erhalten wir $\sin'(x) = \cos(x)$; leiten wir den Kosinus ab, so erhalten wir $\cos'(x) = -\sin(x)$ (dies ergibt sich direkt aus der Reihendefinition unter Annahme, dass die Reihen absolut konvergieren).

Aufgabe 7. Betrachten Sie die Kurve $f(x) := \sin(x) + \sin(2x)$ zwischen 0 und 2π . Zeigen Sie, daß f periodisch mit Periode 2π ist. Machen Sie sich klar, warum das Maximum dieser Funktion strikt kleiner als 2 sein muss und warum die Funktion drei Nullstellen zwischen 0 und 2π haben muss.

Für die trigonometrischen Funktionen haben wir u.a. die folgenden Additionstheoreme:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y), \quad (6)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y), \quad (7)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \quad (8)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y), \quad (9)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1. \quad (10)$$

Aus diesen Additionstheoremen ergeben sich durch Addition und Subtraktion weitere Additionstheoreme. Z.B. erhalten wir durch Addition von (6) und (7) die Gleichung

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin(x) \cos(y). \quad (11)$$

Aufgabe 8. Leiten Sie die folgenden Additionstheoreme aus den oben vorgegebenen ab. Für (v) und (vi) nehmen Sie an, daß $\sin(x) \neq 0$ ist.

(i) $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin(x) \sin(y),$

(ii) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$

(iii) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$

(iv) $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x),$

(v) $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = 2 \cos(x),$ und

(vi) $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 4 \cos^2(x) - 1.$

Wir verwenden unsere Additionstheoreme, um zu zeigen, daß Linearkombinationen von Sinus und Kosinus gleicher Frequenz phasenverschobene Sinusfunktionen derselben Frequenz sind.

Satz 13. Für alle λ, μ, ν existieren C und α , so daß

$$\lambda \sin(\nu x) + \mu \cos(\nu x) = C \cdot \sin(\nu x + \alpha).$$

Beweis. Falls $\mu = 0$, setze $C := \lambda$ und $\alpha = 0$. Falls $\mu \neq 0$, so finden wir ein $\alpha \in (0, \pi)$, so daß $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{\mu}$. Dies liegt daran, daß die Kotangensfunktion $x \mapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ eine Surjektion vom Intervall $(0, \pi)$ auf die reellen Zahlen ist. Insbesondere gilt $\sin \alpha \neq 0$ und wir setzen $C := \frac{\mu}{\sin \alpha}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} C \cdot \sin(\nu x + \alpha) &= \frac{\mu}{\sin \alpha} \sin(\nu x + \alpha) \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{\mu}{\sin \alpha} \cdot (\sin(\nu x) \cdot \cos \alpha + \cos(\nu x) \cdot \sin \alpha) \\ &= \mu \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin(\nu x) + \mu \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos(\nu x) \\ &= \mu \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \sin(\nu x) + \mu \cdot \cos(\nu x) \\ &= \lambda \cdot \sin(\nu x) + \mu \cdot \cos(\nu x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Aufgabe 9. Seien λ, μ, ν gegeben. Zeigen Sie, daß Zahlen C und α existieren, so daß $\lambda \sin(\nu x) + \mu \cos(\nu x) = C \cdot \sin(\nu x + \alpha)$.

Für spätere Berechnungen listen wir einige Integralformeln auf, die man in herkömmlichen Formelkompendien (wie z.B. das *Taschenbuch der Mathematik* von Bronstein und Semen-

djajev) nachschlagen kann (für $a, b \geq 0$)

$$\int \sin ax \sin ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax, \quad (12)$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (\text{falls } a \neq b), \quad (13)$$

$$\int \cos ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax, \quad (14)$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad (\text{falls } a \neq b) \text{ und} \quad (15)$$

$$\int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax. \quad (16)$$

2.4 Das Matrixexponential

Ein weiteres Hilfsmittel, welches wir beim Lösen unserer Differentialgleichung zweiter Ordnung benötigen werden, ist das *Matrixexponential*, eine Verallgemeinerung der Exponentialfunktion aus Abschnitt 2.3 auf Matrizen. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 -Matrix. Wir definieren rekursiv

$$A^0 := E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} := A^n \cdot A,$$

wobei die Operation $\cdot$ in der letzten Zeile die *Matrixmultiplikation* bezeichnet. Um uns die Notation zu erleichtern, schreiben wir a_n, b_n, c_n und d_n für die Einträge der Matrix A^n , also $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, insbesondere gilt: $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 1, a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$ und $d_1 = d$.

Aufgabe 10. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie per Induktion, daß $A^{2k} = 6^k E$ und $A^{2k+1} = 6^k A$, wobei E die 2-dimensionale Einheitsmatrix ist.

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir die *Matrixnorm*

$$\|A\| := a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Der folgende Satz besagt, daß die Matrixnorm *submultiplikativ* ist.

Satz 14. Für Matrizen A und B gilt, daß $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Daraus folgt, daß für beliebige Matrizen A und natürliche Zahlen n gilt, daß $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Beweis. Schreiben wir $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, so haben wir

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

und somit $\|A \cdot B\| = (ae + bg)^2 + (af + bh)^2 + (ce + dg)^2 + (cf + dh)^2$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} (ae + bg)^2 &\leq (a^2 + b^2)(e^2 + g^2), \\ (af + bh)^2 &\leq (a^2 + b^2)(f^2 + h^2), \\ (ce + dg)^2 &\leq (c^2 + d^2)(e^2 + g^2), \\ (cf + dh)^2 &\leq (c^2 + d^2)(f^2 + h^2), \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|A \cdot B\| &= (ae + bg)^2 + (af + bh)^2 + (ce + dg)^2 + (cf + dh)^2 \\ &\leq (a^2 + b^2)(e^2 + g^2) + (a^2 + b^2)(f^2 + h^2) + (c^2 + d^2)(e^2 + g^2) + (c^2 + d^2)(f^2 + h^2) \\ &= (a^2 + b^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) + (c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) \\ &= \|A\| \cdot \|B\|. \end{aligned}$$

Die Folgerung für A^n folgt aus der ersten Aussage per Induktion nach n mittels der rekursiven Definition von A^n . Q.E.D.

Korollar 15. Ist $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, so konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k!}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für die erste Reihe; die anderen Beweise sind identisch. Nach Definition haben wir

$$\|A^k\| = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2$$

und somit

$$|a_k| \leq \sqrt{\|A^k\|} \leq (\sqrt{\|A\|})^k;$$

die zweite Ungleichung gilt nach Satz 14. Daher können wir unter Verwendung des Monotoniekriteriums für Reihen wie folgt abschätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\|A\|})^k}{k!} = e^{\sqrt{\|A\|}}.$$

Die betrachtete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$ ist somit absolut konvergent. Q.E.D.

Unter Verwendung von Korollar 15 definieren wir nun

$$\exp(A) := \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11. Im Beweis von Korollar 15 haben wir die Abschätzung

$$|a_k| \leq \sqrt{\|A^k\|} \leq (\sqrt{\|A\|})^k$$

verwendet, um die Konvergenz der Reihe zu zeigen. Warum reicht hier die Abschätzung $a_k \leq \sqrt{\|A^k\|} \leq (\sqrt{\|A\|})^k$ nicht aus? (Erinnern Sie sich an den Unterschied zwischen *absolut konvergenten* und *bedingt konvergenten* Reihen und zeigen Sie, daß im allgemeinen nicht gilt, falls $x_k \leq y_k$ für alle k und $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.)

2.5 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Funktion $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung*; ein Paar (F, x_0) mit $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Anfangswertproblem erster Ordnung*. Wir sagen, daß $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Lösung* von F ist, wenn φ differenzierbar ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t));$$

gilt auch $\varphi(0) = x_0$, so sagen wir, daß φ eine Lösung des Anfangswertproblems (F, x_0) ist. Wir erinnern an die folgenden Sätze aus den Grundvorlesungen.

Theorem 16 (Satz von Peano). Ist F stetig, so gibt es eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Lösung von F .

Theorem 17 (Satz von Picard-Lindelöf). Ist F stetig in der ersten Koordinate und Lipschitz-stetig in der zweiten Koordinate, so gibt es für jedes Anfangswertproblem (F, x_0) eine eindeutige Lösung.

Aufgabe 12. Betrachten Sie die Funktion $F(x, y) := 2\sqrt{|y|}$ und zeigen Sie, daß F am Punkte $(0, 0)$ stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, daß sowohl die Funktion $f(x) := x^2$ als auch die Funktion $g(x) := 0$ Lösungen des Anfangswertproblems $(F, 0)$ sind. Diskutieren Sie, daß dies (wegen des Satzes von Picard-Lindelöf) bedeutet, daß F nicht Lipschitz-stetig ist (dafür müssen Sie nicht einmal wissen, was das bedeutet!). Sind f und g die einzigen Lösungen des Anfangswertproblems $(F, 0)$? [Hinweis. Setze $h(x) := 0$ für $x < 1$ und $h(x) := (x-1)^2$ für $x \geq 1$. Können Sie das verallgemeinern, um unendliche viele Lösungen zu finden?]

Wir betrachten den Fall sehr einfacher Funktionen F . Eine Differentialgleichung F heißt *linear*, falls $F(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$ für Funktionen $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; sie heißt *linear mit konstanten Koeffizienten*, falls $F(x, y) = a \cdot y + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$; und sie heißt *homogen*, falls $b(x) = 0$ oder $b = 0$.

Satz 18. Ist F eine lineare homogene Differentialgleichung, so bilden die Lösungen von F einen Untervektorraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweis. Es sei $F(x, y) = a(x) \cdot y$. Wir müssen zeigen, dass für zwei Lösungen φ und ψ von F , auch die Funktion $\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi$ für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. Nach den üblichen Regeln für die Differentiation wissen wir, daß $(f + g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$. Also gilt

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi)'(t) &= \lambda \cdot \varphi'(t) + \mu \cdot \psi'(t) \\ &= \lambda \cdot a(t) \cdot \varphi(t) + \mu \cdot a(t) \cdot \psi(t) \\ &= a(t) \cdot (\lambda \cdot \varphi(t) + \mu \cdot \psi(t)) \\ &= a(t) \cdot (\lambda \varphi + \mu \psi)(t). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Wie üblich nennen wir eine Funktion g eine *Stammfunktion* von f , falls g stetig differenzierbar ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, daß $g'(t) = f(t)$.

Satz 19. Ist (F, x_0) eine lineares homogenes Anfangswertproblem mit $F(x, y) = a(x) \cdot y$ und g eine Stammfunktion von a , so ist

$$\varphi(t) := x_0 \cdot e^{g(t)-g(0)}$$

die eindeutige Lösung von (F, x_0) .

Beweis. Zunächst überprüfen wir, daß φ eine Lösung ist. Offensichtlich ist $\varphi(0) = x_0 \cdot e^{g(0)-g(0)} = x_0 \cdot e^0 = x_0 \cdot 1 = x_0$. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= x_0 \cdot g'(t) \cdot e^{g(t)-g(0)} \\ &= x_0 \cdot a(t) \cdot e^{g(t)-g(0)} \\ &= a(t) \cdot (x_0 \cdot e^{g(t)-g(0)}) \\ &= a(t) \cdot \varphi(t), \end{aligned}$$

also ist φ eine Lösung.

Man beachte, daß lineare Funktionen Lipschitz-stetig in der zweiten Koordinate sind. Unser Begriff der Stammfunktion bedeutet, dass die Existenz einer Stammfunktion von a impliziert, dass a stetig ist. Somit ist F stetig in der ersten Koordinate. Nun folgt die Eindeutigkeit aus Satz 17.

Q.E.D.

3 Schwingungen

Motiviert durch die pythagoräischen Beobachtungen zur Harmonie von Saiten unterschiedlicher Länge, fragen wir uns, welche mathematische Erklärung wir dafür geben können, daß die Halbierung der Saite die Frequenz der Schwingung verdoppelt. Dieses Kapitel und Kapitel 4 werden diese Fragen beantworten.

Die schwingende Saite wird ausgelenkt und schwingt zurück in ihren Grundzustand. An jedem fest vorgegebenen Punkt x auf der Saite schwingt die Saite also auf und ab. Die genaue Position an dem Punkt x hängt allerdings nicht nur von der Zeit ab, sondern auch von der Entfernung von den Aufhängungspunkten (an denen keine Schwingung stattfindet). Diese Schwingung zu beschreiben, ist komplizierter als ein schwingendes System, welches nicht an den Aufhängungspunkten fixiert ist. Wir werden in Kapitel 4 auf diese Frage zurückkommen. In diesem Kapitel wollen wir zunächst ein vereinfachtes Modell betrachten, welches die Aufhängung ignoriert. Das Modell ist das *Federpendel* oder der *harmonische Oszillator*.

3.1 Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator besteht aus einer aufgehängten Feder, die sich zu Beginn im Ruhezustand befindet. Wir lenken die Feder aus, indem wir sie vertikal nach unten ziehen. Auf die Feder wirkt eine *Rückstellkraft*, die proportional zur Auslenkung und umgekehrt gerichtet ist: die Masse des Federpendels wird in Richtung der Ruhelage beschleunigt und schwingt aufgrund des Trägheitsprinzips darüber hinaus. Die Rückstellkraft wird durch das elastische Verhalten der Feder nach dem sogenannten Hookeschen Gesetz (nach Robert Hooke, 1635–1702) erzeugt und hängt von der Steifigkeit der Feder ab (sogenannte *Federkonstante* D). Die entsprechende physikalische Gleichung für die Rückstellkraft ist somit

$$F(t) = -D \cdot \varphi(t), \quad (17)$$

wobei $F(t)$ die Rückstellkraft zur Zeit t , D die Federkonstante und φ die vertikale Position zur Zeit t ist. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Rückstellkraft auch

$$F(t) = m \cdot a(t), \quad (18)$$

wobei m die Masse des Pendelkörpers und a die Beschleunigung zur Zeit t ist. Da die Beschleunigung die zweite Ableitung der Position nach der Zeit ist, erhalten wir $F(t) = m \cdot \varphi''(t)$ und somit durch Gleichsetzen von (17) und (18)

$$\varphi''(t) = -\frac{D}{m} \varphi(t). \quad (19)$$

Eine solche Gleichung nennt man auch *lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung* (da eine zweite Ableitung auftaucht). In diesem Kapitel werden wir argumentieren, dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung von der Form

$$\varphi(t) = \lambda \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + \mu \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

ist.

Aufgabe 13. Überprüfen Sie, daß $\lambda \sin(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t) + \mu \cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t)$ die Gleichung (19) erfüllt.

3.2 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung können wir nicht auf (19) anwenden, weil in dieser Gleichung eine zweite Ableitung vorkommt. Um diese Gleichung auf den bekannten Fall zurückzuführen, verwenden wir einen Trick.

Zusätzlich zur Funktionsvariable φ führen wir eine Variable ψ ein, welche für die Ableitung von φ steht. Also erhalten wir die folgenden zwei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \psi(t) \\ \psi'(t) &= -\frac{D}{m}\varphi(t).\end{aligned}$$

In Vektorschreibweise erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix};$$

wir nennen dies ein *lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung*. Wir haben also unsere Gleichung zweiter Ordnung in zwei Gleichungen erster Ordnung überführt.

Allgemeiner, sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2 -Matrix. Wir nennen A ein *lineares System homogener gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* und sagen, dass ein Paar (φ, ψ) eine *Lösung von A* ist, falls wir für alle $t \in \mathbb{R}$ haben, dass

$$\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Operation $\cdot$ die gewöhnliche Matrixmultiplikation ist; nach den Regeln der Matrixmultiplikation ist dies gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= a \cdot \varphi(t) + b \cdot \psi(t) \text{ und} \\ \psi'(t) &= c \cdot \varphi(t) + d \cdot \psi(t).\end{aligned}$$

Haben wir zusätzlich $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, so nennen wir (A, x_0, y_0) ein *lineares System von Anfangswertproblemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* und sagen, daß eine Lösung (φ, ψ) von A das Anfangswertproblem löst, wenn zusätzlich $\varphi(0) = x_0$ und $\psi(0) = y_0$ gilt.

Wir hatten in Abschnitt 2.1 gesehen, daß $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum bildet. Analog zu Satz 18 im eindimensionalen Fall kann man zeigen, daß die Lösungen einen Untervektorraum des Vektorraums $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ bilden.

Aufgabe 14. Sei A ein lineares System homogener gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zeigen Sie, daß die Lösungen von A einen Untervektorraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ bilden.

Diesen Untervektorraum, den Lösungsraum zu A kann man nun wie im eindimensionalen Falle einfach ausrechnen. Statt der Exponentialfunktion verwenden wir das Matrixexponential aus Abschnitt 2.4.

Theorem 20 (ohne Beweis). Ist A ein lineares homogenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, so ist die Matrix e^{Ax} eine (von x abhängige) 2×2 -Matrix und die Spaltenvektoren dieser Matrix bilden eine Basis des Lösungsvektorraums von A .

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Spezialfall für konstante Koeffizienten von Satz 19. Eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist einfach eine reelle Zahl a , also eine 1×1 -Matrix. Die zu lösende Gleichung ist $\varphi' = a \cdot \varphi$ und für einen vorgegebenen Anfangswert x_0 liefert Satz 19 als eindeutige Lösung die Funktion $\varphi(x) := e^{ax - ax_0}$. [Man beachte, dass $x \mapsto ax$ eine Stammfunktion der konstanten Funktion mit Wert a ist.]

3.3 Lösung der Gleichung für den harmonischen Oszillator

Wir kehren nun zurück zu unserer Differentialgleichung (19) für den harmonischen Oszillator, die wir in Abschnitt 3.2 in ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung verwandelt hatten:

$$\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Zur Notationsvereinfachung schreiben wir $c := \frac{D}{m}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$. Nach Satz 20 müssen wir zur Lösung dieses Problems das Matrixexponential berechnen. Hierfür betrachten wir zunächst die endlichen Produkte von A .

$$\begin{aligned} A^0 &= E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-c)^0 \cdot E, \\ A^1 &= A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} = (-c)^0 \cdot A, \\ A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = (-c)^1 \cdot E, \\ A^3 &= A^2 \cdot A = -c \cdot E \cdot A = -c \cdot A = (-c)^1 \cdot A, \\ A^4 &= A^2 \cdot A^2 = -c \cdot E \cdot (-c) \cdot E = (-c)^2 \cdot E. \end{aligned}$$

Per Induktion gilt also

$$\begin{aligned} A^{2k} &= (-c)^k \cdot E = \begin{pmatrix} (-c)^k & 0 \\ 0 & (-c)^k \end{pmatrix} \text{ und} \\ A^{2k+1} &= (-c)^k \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & (-c)^k \\ (-c)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} a_k &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ (-c)^k & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \\ b_k &= \begin{cases} (-c)^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \\ c_k &= \begin{cases} (-c)^{k+1} & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \\ d_k &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade und} \\ (-c)^k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Matrixexponential

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k x^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k x^k}{k!} \end{pmatrix},$$

und im einzelnen unter Verwendung der Definition der Sinus- und Kosinusfunktionen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{c}^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{c}x)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\sqrt{c} \cdot x), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{c}^{2k} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{c}x)^{2k+1}}{\sqrt{c}(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} \cdot x), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^k \sqrt{c}^{2k+2} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{c})(-1)^k (\sqrt{c}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sqrt{c} \cdot \sin(\sqrt{c} \cdot x) \text{ und} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{c}^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{c}x)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\sqrt{c} \cdot x), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{c} \cdot x) & \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} \cdot x) \\ -\sqrt{c} \cdot \sin(\sqrt{c} \cdot x) & \cos(\sqrt{c} \cdot x) \end{pmatrix}$$

und somit sind nach Satz 20 sind die Funktionspaare

$$(\cos(\sqrt{c} \cdot x), -\sqrt{c} \sin(\sqrt{c} \cdot x)) \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} \cdot x), \cos(\sqrt{c} \cdot x)\right)$$

eine Basis des Lösungsvektorraums von A . Hierbei ist die jeweils erste Funktion des Paares die Lösung für φ und die jeweils zweite Funktion die Lösung für ψ ($= \varphi'$).

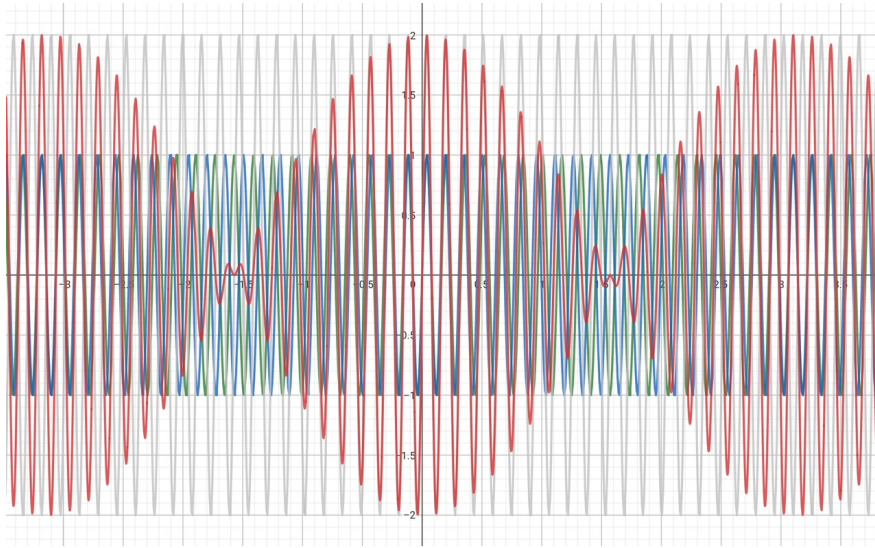


Abbildung 4: Schwebungen: Die blau und grün gezeichneten Kurven sind die Funktionen $x \mapsto \sin(39x)$ und $x \mapsto \sin(41x)$. Ihre Summe (rot gezeichnet) ist die durch $\cos(x)$ modulierte Kurve mit doppelter Amplitude und durchschnittlicher Frequenz $2 \sin(40x)$ (hellgrau hinterlegt).

Aufgabe 15. Überprüfen Sie, daß wir keine Rechenfehler gemacht haben, indem Sie die beiden Funktionspaare in (20) einsetzen.

Satz 21. Eine Funktion φ ist eine Lösung von (20) genau dann, wenn λ und μ existieren, so daß $\varphi(t) = \lambda \cos(\sqrt{c} \cdot t) + \mu \sin(\sqrt{c} \cdot t)$.

Beweis. Nach unserer obigen Berechnung ist jede Lösung von der Form $a \cos(\sqrt{c} \cdot t) + b(-\sqrt{c}) \sin(\sqrt{c}t)$. Setzen wir $\lambda := a$ und $\mu := -b\sqrt{c}$, so ist φ in der gewünschten Form.

Q.E.D.

Nach Satz 13 ist $\varphi(t) = \lambda \cos(\sqrt{c} \cdot t) + \mu \sin(\sqrt{c} \cdot t) = C \cdot \sin(\sqrt{c}t + \alpha)$ für geeignete Amplitude C und Phase α . Daher ist jede Lösung von (20) ein phasenverschobener Sinus mit der Frequenz $\frac{\sqrt{c}}{2\pi}$. Die Wahl der Phase entspricht der Wahl der Anfangswerte.

3.4 Schwebungen

Da wir nun wissen, daß unsere Schwingungen im wesentlichen Sinusfunktionen sind, die sich in ihrer Frequenz unterscheiden, können wir ein erstes Beispiel für die interessanten Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Musik geben.

Wir stellen uns das folgende praktische Problem vor: ich habe zwei Saiten, die den gleichen Ton geben sollen, aber sie sind leicht verstimmt. Wie finde ich heraus, um wieviel die Saiten verstimmt sind? Dieses Problem tritt z.B. beim Stimmen eines Klaviers auf, dem dem die Töne jeweils durch mehrere gleichklingende Saiten gespielt werden.

Sei also ν der Mittelwert der beiden Frequenzen, so daß eine der Saiten Frequenz $\nu + \varepsilon$ und die zweite Frequenz $\nu - \varepsilon$ hat.

Also wird die erste Schwingung durch die Funktion

$$x \mapsto \sin((\nu + \varepsilon)x) = \sin(\nu x + \varepsilon x)$$

und die zweite durch

$$x \mapsto \sin((\nu - \varepsilon)x) = \sin(\nu x - \varepsilon x)$$

beschrieben. Der gemeinsame Klang ist also

$$\sin(\nu x + \varepsilon x) + \sin(\nu x - \varepsilon x),$$

also nach unserem kombinierten Additionstheorem (11)

$$\sin(\nu x + \varepsilon x) + \sin(\nu x - \varepsilon x) = 2 \sin(\nu x) \cos(\varepsilon x).$$

Der Gesamtklang klingt also wie der Mittelwert der beiden Saiten, verstärkt mit Faktor zwei und *moduliert* durch einen Kosinus mit der Frequenz ε .

Wählen wir als Beispiel die Funktionen $\sin(39x)$ und $\sin(41x)$, also $\varepsilon = 1$, so erhalten wir

$$\sin(39x) + \sin(41x) = 2 \sin(40x) \cos(x)$$

wie in Abb. 4 dargestellt. Diese Kosinusmodulation kann man deutlich beim Erklängen des gemeinsamen Tons als rhythmisches Auf- und Abschwollen der Lautstärke des Klangs erkennen. Man nennt dieses Phänomen *Schwebungen*. Man beachte, daß die Frequenz der Modulation nicht vom relativen Abstand der Frequenzen, sondern vom absoluten Abstand ε abhängt. Eine Verstimmung um 1 Hz bei sehr hohen Tönen (z.B. 5000 Hz) ergibt die gleiche Modulation wie eine Verstimmung um 1 Hz bei tiefen Tönen (z.B. 50 Hz). Man kann den Abstand in Hz zwischen den beiden Tönen direkt an der Frequenz der Schwebung ablesen: der Abstand ist das Doppelte der Frequenz der Schwebung.

Aufgabe 16. Nehmen Sie an, eine Klavierstimmerin oder ein Klavierstimmer versucht, zwei Saiten gleich zu stimmen. Sie oder er schlägt die Saiten an und hört eine Schwebung von 2 Hz. Um wieviel muß man die erste der beiden Saiten verstimmen, damit die Saiten gleich klingen? Hängt die Antwort von der Tonhöhe der Saiten ab? Weiss man, ob man nach unten oder nach oben stimmen muß?

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit dem Phänomen der Schwebungen bei drei Saiten.

Aufgabe 17. Zeigen Sie, daß

$$\sin(\nu x - \varepsilon \nu x) + \sin(\nu x) + \sin(\nu x + \varepsilon \nu x) = (4 \cos^2(\tfrac{\varepsilon}{2} \nu x) - 1) \sin(\nu x).$$

[*Hinweis.* Multiplizieren Sie mit $\sin(\tfrac{\varepsilon}{2} \nu x)$ und verwenden Sie die Additionstheoreme aus Abschnitt 2.3.]

Aufgabe 18. Angenommen, eine Klavierstimmerin oder ein Klavierstimmer hat von den drei Saiten für einen Klang die mittlere auf 220 Hz gestimmt und die beiden anderen weichen jeweils um 2 Hz nach unten und oben ab (218 Hz und 222 Hz). Eine Schwebung mit Frequenz 1 Hz, bei der sich jeweils ein lauter Ton und ein leiserer Ton der gleichen Frequenz abwechseln, ist zu hören. (Wenn Sie sich dies nicht vorstellen können, erzeugen Sie den Ton mittels eines Tongenerators mit drei Sinusschwingungen mit 218, 220 und 222 Hz.) Welche Frequenz hat der Ton? Erklären Sie die Frequenz und das Klangverhalten mathematisch.

[*Hinweis.* Betrachten Sie das Verhalten der Funktion $4 \cos^2(x) - 1$.]

4 Die Wellengleichung

Wir kehren nun zu unserem ursprünglichen Problem der schwingenden Saite zurück: wir haben eine Saite der Länge ℓ , die an den Punkten 0 und ℓ fixiert ist und schwingt. Im Prinzip können wir uns die Schwingung jedes einzelnen Massepunkts der Saite wie einen harmonischen Oszillator vorstellen, aber die Tatsache, daß die Saite fixiert ist und dadurch zusätzliche Wechselwirkungen mit den anderen Massepunkten entstehen, sorgt dafür, daß die Schwingung auch von der Position auf der Saite abhängt.

Wir erhalten eine Funktion in zwei Variablen x und t , wobei x für die Position auf der Saite steht und t für die Zeit. Wir haben $\varphi(0, t) = 0 = \varphi(\ell, t)$.

Eine solche Funktion in zwei Variablen können wir in beiden Variablen unabhängig voneinander ableiten: wir schreiben $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ für die Ableitung nach x und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für die Ableitung nach t ; weiterhin $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ für die zweite Ableitung nach t und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ für die zweite Ableitung nach x .

Mit relativ elementaren physikalischen Überlegungen (auf die wir hier nicht eingehen wollen) kann man nun die Differentialgleichung für φ bestimmen; sie heisst die *Wellengleichung* und lautet

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (21)$$

für eine geeignete positive Konstante C , welche durch die physikalischen Gegebenheiten bestimmt ist. Eine solche Funktionsgleichung, in der Ableitungen nach verschiedenen Variablen auftauchen nennt man *partielle Differentialgleichung*. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist deutlich komplizierter als die der gewöhnlichen Differentialgleichungen und es gibt weitaus weniger allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze als in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. In diesem Kapitel stellen wir die Lösungen von (21) weitgehend ohne Beweise vor und leiten einige Konsequenzen ab.

4.1 D'Alemberts Methode

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) stellte fest, daß man die Ableitungsoperatoren in (21) faktorisieren kann und somit die Welle als Superposition von zwei Wellen darzustellen.

Theorem 22 (Satz von d'Alembert; ohne Beweis). Ist $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (21), so existieren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\varphi(x, t) = f(x + \sqrt{C}t) + g(x - \sqrt{C}t).$$

Korollar 23. Ist $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (21) mit $\varphi(0, t) = 0 = \varphi(\ell, t)$, so ist $\varphi(x, t) = f(x + \sqrt{C}t) - f(\sqrt{C}t - x)$ für eine 2ℓ -periodische Funktion f .

Beweis. Wir haben nach Satz 22 Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x, t) = f(x + \sqrt{C}t) + g(x - \sqrt{C}t), \quad (22)$$

$$\varphi(0, t) = 0 \text{ und} \quad (23)$$

$$\varphi(\ell, t) = 0. \quad (24)$$

Wir setzen (23) in (22) ein und erhalten

$$0 = \varphi(0, t) = f(0 + \sqrt{C}t) + g(0 - \sqrt{C}t) = f(\sqrt{C}t) + g(-\sqrt{C}t),$$

also $f(\sqrt{C}t) = -g(-\sqrt{C}t)$ für alle t . Da C und somit auch $\sqrt{C}$ positiv sind, gilt

$$f(t) = -g(-t) \quad (25)$$

für alle t . Nun können wir (25) in (22) einsetzen und erhalten

$$\varphi(x, t) = f(x + \sqrt{C}t) - f(\sqrt{C}t - x). \quad (26)$$

Setzen wir nun (24) in (26) ein, erhalten wir $0 = \varphi(\ell, t) = f(\ell + \sqrt{C}t) - f(-\ell - \sqrt{C}t)$ und somit $f(\ell + \sqrt{C}t) = f(-\ell - \sqrt{C}t)$ für alle t . Wir parametrisieren um durch $s := \sqrt{C}t - \ell$ und erhalten

$$f(s) = f(s + 2\ell)$$

für alle s , also ist f 2ℓ -periodisch.

Q.E.D.

Da f 2ℓ -periodisch ist, ist für jedes x die Funktion $t \mapsto f(x + \sqrt{C}t)$ $\frac{2\ell}{\sqrt{C}}$ -periodisch wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned} f(x + \sqrt{C}(t + \frac{2\ell}{\sqrt{C}})) &= f(x + \sqrt{C}t + \sqrt{C} \frac{2\ell}{\sqrt{C}}) \\ &= f(x + \sqrt{C}t + 2\ell) = f(x + \sqrt{C}t). \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Zeigen Sie, daß die Funktion $t \mapsto f(\sqrt{C}t - x)$ $\frac{2\ell}{\sqrt{C}}$ -periodisch ist.

Die Funktion $t \mapsto \varphi(x, t)$ ist also eine Linearkombination zweier $\frac{2\ell}{\sqrt{C}}$ -periodischer Funktionen und somit nach Satz 2 ebenfalls $\frac{2\ell}{\sqrt{C}}$ -periodisch. Dies wird sich in Kapitel 5 als nützlich herausstellen.

4.2 Die Bernoulli-Lösung

Die einfachste und bekannteste Lösung der Wellengleichung ist die sogenannte *Bernoulli-Lösung*, benannt nach Daniel Bernoulli (1700–1782). Wir setzen

$$f(x) := \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

und erhalten

$$\varphi(x, t) = f(x + \sqrt{C}t) - f(\sqrt{C}t - x) = \cos\left(\frac{\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{-\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right).$$

Satz 24. Die Bernoulli-Lösung erfüllt

$$\varphi(x, t) = 2 \sin\left(\frac{\pi\sqrt{C}}{\ell}t\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right);$$

für ein fest vorgegebenes x handelt es sich also um eine Sinus-Funktion mit Frequenz $\frac{\sqrt{C}}{2\ell}$.

Beweis. Wir wenden das Additionstheorem (9), also

$$\cos(a) - \cos(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

auf die Bernoulli-Lösung mit $a = \frac{\pi x + \pi\sqrt{C}t}{\ell}$ und $b = \frac{\pi\sqrt{C}t - \pi x}{\ell}$ an und erhalten $a + b = \frac{2\pi\sqrt{C}t}{\ell}$ und $a - b = \frac{2\pi x}{\ell}$. Dies liefert unmittelbar die Behauptung. Q.E.D.

Wir überprüfen nun, daß die Bernoulli-Lösung eine Lösung der Wellengleichung ist. Hierfür berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) &= -\frac{\pi\sqrt{C}}{\ell} \sin\left(\frac{\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi\sqrt{C}}{\ell} \sin\left(\frac{-\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) &= -\frac{\pi\sqrt{C}}{\ell} \frac{\pi\sqrt{C}}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi\sqrt{C}}{\ell} \frac{\pi\sqrt{C}}{\ell} \cos\left(\frac{-\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) \\ &= -\left(\frac{\pi\sqrt{C}}{\ell}\right)^2 \varphi(x, t) = -\frac{\pi^2 C}{\ell^2} \varphi(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t) &= -\frac{\pi}{\ell} \sin\left(\frac{\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi}{\ell} \sin\left(\frac{-\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t) &= -\frac{\pi}{\ell} \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) + \frac{\pi}{\ell} \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{-\pi x + \sqrt{C}t\pi}{\ell}\right) \\ &= -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \varphi(x, t) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \varphi(x, t). \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = C \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi$.

Aufgabe 20. Zeigen Sie, daß auch die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ eine Lösung der Wellengleichung induziert.

4.3 Frequenzberechnungen für Saiten

In Abschnitt 4.2 hatten wir gesehen, daß die Bernoulli-Lösung der Wellengleichung (21) eine Sinusschwingung mit Frequenz $\frac{\sqrt{C}}{2\ell}$ ist, wobei C durch Spannkraft und Dichte der Saite gegeben ist, genauer

$$C = \frac{T}{\lambda},$$

wobei T die *Spannkraft* der Saite ist, gemessen in Newton (N, wobei $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$) und λ die *lineare Dichte* der Saite, gemessen in kg/m (Kilogramm pro Meter). Dies erlaubt uns nun, die Frequenz der Schwingung der Bernoulli-Lösung durch Länge, Spannkraft und lineare Dichte auszudrücken:

$$\nu = \frac{\sqrt{C}}{2\ell} = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{1}{2\ell}. \quad (27)$$

Die Gleichung (27) wird als *Mersennesche Gleichung* (nach Marin Mersenne, 1588–1648) bezeichnet. Aus ihr leiten sich unmittelbar die drei sogenannten *Mersenneschen Gesetze* oder *Gesetze der schwingenden Saite* ab:

Material	Dichte (in kg m^{-3})
Nylon	1.100
Seide	1.140
Rosshaar	1.300
Naturdarm	1.350
Stahl	7.860
Messing	8.500
Nickel	8.900
Kupfer	8.960

Abbildung 5: Liste von Dichten typischer Saitenmaterialien

- (I) *Das Gesetz der Länge.* Die Frequenz ist invers proportional zur Saitenlänge; d.h. Verdopplung der Saitenlänge halbiert die Frequenz.
- (II) *Das Gesetz der Spannkraft.* Die Frequenz ist proportional zur Wurzel der Spannkraft, d.h. Vervierfachung der Spannkraft verdoppelt die Frequenz.
- (III) *Gesetz der linearen Dichte.* Die Frequenz ist invers proportional zur Wurzel der linearen Dichte, d.h. Vervierfachung der linearen Dichte halbiert die Frequenz.

Die lineare Dichte ist nicht zu verwechseln mit der herkömmlichen *Dichte*, üblicherweise bezeichnet mit dem Buchstaben ρ und gemessen in kg/m^3 ; die Dichte ist Gewicht pro Volumeneinheit; im Gegensatz dazu ist die lineare Dichte das Gewicht pro Längeneinheit der Saite. Wir erhalten also den Zusammenhang

$$\lambda = \rho A,$$

wobei A der Flächeninhalt des Querschnitts der Saite ist. Während die Dichte ρ lediglich vom Material abhängt, hängt die lineare Dichte also auch vom Radius der Saite ab. Da der Flächeninhalt des Querschnitts der Saite gerade $A = \pi r^2$ ist, wobei r der Radius der Saite ist, ergibt sich

$$\lambda = \rho A = \rho \pi r^2,$$

d.h. die lineare Dichte ist proportional zum Quadrat des Radius. Zusammen mit dem *Gesetz der linearen Dichte* ergibt sich:

- (IV) *Das Gesetz des Radius.* Die Frequenz ist invers proportional zur Saitendicke, d.h. Verdopplung des Radius halbiert die Frequenz.

Aufgabe 21. Leiten Sie aus der Mersenneschen Formel das folgende Gesetz her: „Bei gleicher Frequenz ist die Länge einer Saite invers proportional zum Durchmesser der Saite.“

Ähnlich wie bei Dichte und linearer Dichte gibt es noch die *mechanische Spannung* σ , gemessen in N/m^2 , welche die Spannkraft pro Fläche angibt. Wir erhalten $T = \sigma A$.

Wir wollen uns ein Beispiel ansehen. Klaviersaiten sind üblicherweise aus Stahl (vgl. Abb. 5) und eine typische mechanische Spannung auf einem Klavierrahmen ist $\sigma = 10^9 \text{ N/m}^2$. Bei gleichbleibender mechanischer Spannung, Länge und Material hängt der Ton einer Saite nicht vom Radius der Saite ab, da $\frac{T}{\lambda} = \frac{\sigma A}{\rho A} = \frac{\sigma}{\rho}$.

Wir fragen uns, wie lang die Saite sein muß, um einen Ton von 440 Hz zu geben (also $\nu = 440 \text{ s}^{-1}$). Wir berechnen

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{10^9}{7860} \approx 127226 \text{ und somit } \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \approx 356.$$

Die Mersennesche Gleichung (27) in Kombination mit $\frac{T}{\lambda} = \frac{\sigma}{\rho}$ liefert

$$\nu = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{1}{2\ell} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{1}{2\ell} = \frac{412}{2\ell} = \frac{178}{\ell},$$

und somit $\ell = \frac{178}{\nu}$. Für $\nu = 440 \text{ Hz}$ erhalten wir $\ell \approx 0.4045 \text{ m}$, also muß die Saite ungefähr 40 cm lang sein.

Aufgabe 22. Nehmen Sie an, daß Klaviersaiten mit einer Spannkraft von 900 N gespannt sind und daß die Diskantsaiten im Klavier einen Durchmesser von 0,6 mm haben. Der höchste Ton eines Klaviers wird üblicherweise auf etwa 4000 Hz gestimmt. Welche Saitenlänge brauchen wir für diesen Ton, wenn die Saiten aus den in Abb. 5 angegebenen Materialien sind?

Aufgabe 23. Mit den Angaben aus der vorigen Aufgabe, was muß Durchmesser einer Saite aus Stahl sein, damit sie in ein 150cm hohes Klavier paßt und einen Ton der Frequenz 55 Hz liefert? Wie hoch müßte ein Klavier für einen Ton von 55 Hz mindestens sein, welches mit Naturdarmsaiten mit maximal $2\frac{1}{2}$ mm Durchmesser bespannt ist?

Aufgabe 24. Eine Geige ist mit Naturdarmsaiten bespannt, die 30 cm lang sind und 0,45 mm Durchmesser haben. Eine übliche Geigenstimmung stimmt die vier Saiten auf 660 Hz, 440 Hz, $293\frac{1}{3}$ Hz und $195\frac{5}{9}$ Hz. Berechnen Sie die Spannkraft der vier Saiten auf der Geige.

5 Fourieranalyse

In diesem Kapitel stellen wir fest, dass die Sinus- und Kosinusfunktion nicht einfach nur Beispiele für periodische Funktionen sind, sondern daß alle periodischen Funktionen aus bestimmten Sinus- und Kosinusfunktionen zusammengesetzt sind. Unter bestimmten Voraussetzungen ist diese Zusammensetzung eindeutig: dies ist die Antwort auf die in Kapitel 1 gestellte Frage nach der Rekonstruierbarkeit von Tönen aus einem Zusammenklang (vgl. S. 10).

5.1 Fourierreihen

Sei ν eine gegebene Frequenz. Für jede positive natürliche Zahl m betrachten wir die trigonometrischen Funktionen $t \mapsto \sin(2\pi m\nu t)$ und $t \mapsto \cos(2\pi m\nu t)$. All diese Funktionen sind nach Lemmas 3 & 4 $1/\nu$ -periodisch. Somit sind nach Satz 2 auch beliebige Linearkombinationen dieser Funktionen $1/\nu$ -periodisch.

Seien $\vec{a} = (a_n; n \in \mathbb{N})$ und $\vec{b} = (b_n; n \in \mathbb{N})$ zwei reellwertige Folgen und $F := (\vec{a}, \vec{b})$. Jedes solche Paar F erlaubt uns die Definition einer Reihe: für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$f_F^\nu(t) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m\nu t) + b_m \sin(2\pi m\nu t).$$

Wir nennen die Werte a_m *Kosinuskoeffizienten* und die Werte b_m *Sinuskoeffizienten*. Wir sagen, daß F ein ν -Fourierfolgenpaar ist, falls diese Reihe für jedes $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. In diesem Falle nennen wir die Reihe eine *Fourierreihe*.⁸

Lemma 25. Seien $\nu, \nu^* > 0$ beliebig und F ein ν -Fourierfolgenpaar. Dann ist F ein ν^* -Fourierfolgenpaar.

Beweis. Wähle t beliebig. Wir müssen zeigen, daß

$$f_F^{\nu^*}(t) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m\nu^* t) + b_m \sin(2\pi m\nu^* t)$$

konvergiert. Setze $t^* := \frac{\nu^*}{\nu} t$. Dann gilt nach Annahme, daß

$$f_F^\nu(t^*) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m\nu t^*) + b_m \sin(2\pi m\nu t^*)$$

konvergiert, aber

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m\nu t^*) + b_m \sin(2\pi m\nu t^*) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m\nu \frac{\nu^*}{\nu} t) + b_m \sin(2\pi m\nu \frac{\nu^*}{\nu} t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m\nu^* t) + b_m \sin(2\pi m\nu^* t). \end{aligned}$$

Q.E.D.

⁸Fourierreihen sind nach Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) benannt, der solche Reihen für die Lösung der Wärmeleichung verwendete.

Lemma 25 sagt, daß die Eigenschaft, ein Fourierfolgenpaar zu sein, unabhängig von der Frequenz ist. Wir nennen F also ein *Fourierfolgenpaar*, wenn es ein ν -Fourierfolgenpaar für irgendein $\nu > 0$ (und somit für alle) ist. In diesem Falle nennen wir die Funktion f_F^ν auch die *Fourierreihe von F zur Frequenz ν* . Wir sagen, eine Funktion f hat eine *Fourierreihendarstellung der Frequenz ν* , wenn es ein Fourierfolgenpaar F gibt, so daß $f = f_F^\nu$.

Sind die Folgen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ fast überall null, so ist die Fourierreihe eine endliche Summe und konvergiert somit für alle $t \in \mathbb{R}$. Z.B. $a_n = 0$ für alle n , $b_1 = 1$ und $b_n = 0$ für alle $n \neq 1$ liefert

$$a_m \cos(2\pi m \nu t) + b_m \sin(2\pi m \nu t) = \begin{cases} \sin(2\pi \nu t) & \text{falls } m = 1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also ist $f_F^\nu(t) = \sin(2\pi \nu t)$ für alle t . Dies zeigt auch, daß für ein Fourierpaar F die Funktionen f_F^ν für verschiedene Frequenzen ν i.a. nicht identisch sind: für unterschiedliche Werte von ν sind die Funktionen $t \mapsto \sin(2\pi \nu t)$ voneinander verschieden.

I.a. konvergieren diese trigonometrischen Reihen nicht. Haben wir z.B. $a_n = b_n = 1$ für alle n , so gilt

$$a_m \cos(2\pi m \nu t) + b_m \sin(2\pi m \nu t) = \cos(2\pi m \nu t) + \sin(2\pi m \nu t),$$

also haben wir am Punkte $t = 0$

$$a_m \cos(2\pi m \nu t) + b_m \sin(2\pi m \nu t) = 1 + 0 = 1$$

und somit $f_F^\nu(0) = \sum_{m=0}^{\infty} 1 = \infty$.

Aufgabe 25. Sei $F = (\vec{a}, \vec{b})$ ein ν -Fourierfolgenpaar. Zeigen Sie, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Nullfolgen sein müssen.

Diese Beispiele zeigen, daß nur besondere Paare von Folgen Fourierfolgenpaare sind. Außerdem können wir nicht erwarten, daß beliebige Funktionen eine Fourierreihendarstellung haben: ist nämlich F ein Fourierfolgenpaar, so ist die Funktion f_F^ν unmittelbar $1/\nu$ -periodisch, da jedes einzelne Reihenglied $1/\nu$ -periodisch ist:

$$\begin{aligned} f_F^\nu(t + \frac{1}{\nu}) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m \nu(t + \frac{1}{\nu})) + b_m \sin(2\pi m \nu(t + \frac{1}{\nu})) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m \nu t + \frac{2\pi m \nu}{\nu}) + b_m \sin(2\pi m \nu t + \frac{2\pi m \nu}{\nu}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m \nu t + 2\pi m) + b_m \sin(2\pi m \nu t + 2\pi m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(2\pi m \nu t) + b_m \sin(2\pi m \nu t) = f_F(t). \end{aligned}$$

5.2 Der Satz von Dirichlet

Die formale Theorie der Fourierreihen brauchte mehr mathematische Theorie (insbesondere Integrationstheorie) als Fourier Anfang des 19. Jahrhunderts zur Verfügung stand. Der grundlegende Satz in diesem Zusammenhang ist der Satz von Dirichlet, benannt nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).

Theorem 26 (Satz von Dirichlet). Ist f eine $\frac{1}{\nu}$ -periodische stetig differenzierbare Funktion, so gibt es ein Fourierfolgenpaar F , so daß $f = f_F^\nu$. Wir können die Koeffizienten explizit wie folgt berechnen (zur besseren Lesbarkeit schreiben wir $L := \frac{1}{\nu}$ für die Periode):

$$\begin{aligned} a_0 &= \nu \int_0^L f(\vartheta) \, d\vartheta, \\ a_m &= 2\nu \int_0^L \cos(2\pi m\nu\vartheta) f(\vartheta) \, d\vartheta \text{ für alle } m > 0 \text{ und} \\ b_m &= 2\nu \int_0^L \sin(2\pi m\nu\vartheta) f(\vartheta) \, d\vartheta \text{ für alle } m \geq 0. \end{aligned}$$

Der Satz von Dirichlet besagt, daß jede L -periodische Funktion eine Fourierreihe hat und somit durch eine Linearkombination von Sinus und Kosinus mit Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache von ν sind, approximiert werden kann. In Abschnitt 4.1 hatten wir gesehen, daß alle Lösungen der Wellengleichungen periodisch sind: hat eine Lösung die Periode L , so hat sie nach dem Satz von Dirichlet also eine Fourierreihe mit Frequenz $\nu = 1/L$.

Wir nennen ein Fourierfolgenpaar eine *Sinus-Fourierfolge*, falls alle $a_i = 0$ sind und eine *Kosinus-Fourierfolge*, falls alle $b_i = 0$ sind.

Satz 27. Sei f eine $\frac{1}{\nu}$ -periodische stetig differenzierbare Funktion und F das nach dem Satz von Dirichlet berechnete Fourierfolgenpaar für f . Ist f eine gerade Funktion, so ist F eine Kosinus-Fourierfolge; ist f eine ungerade Funktion, so ist F eine Sinus-Fourierfolge.

Beweis. Sei f gerade; da Sinus ungerade ist, ist $\vartheta \mapsto \sin(2\pi m\nu\vartheta)f(\vartheta)$ eine ungerade Funktion nach Satz 10. Da beide Funktionen L -periodisch sind, ist auch das Produkt nach Lemma 5 L -periodisch. Also ist

$$b_m = 2\nu \int_0^L \sin(2\pi m\nu\vartheta) f(\vartheta) \, d\vartheta = 0$$

nach Korollar 12. Der Fall, daß f gerade ist, verwendet, daß $\vartheta \mapsto \cos(2\pi m\nu\vartheta)f(\vartheta)$ eine ungerade Funktion ist. Q.E.D.

Zur Illustration wollen wir sehen, daß die Fourierfolge einer endlichen Linearkombination von Sinus und Kosinusfunktionen derselben Grundfrequenz uns diese Folge zurückliefert.

Satz 28. Seien $m_1, \dots, m_k$ und $n_1, \dots, n_\ell$ jeweils paarweise verschieden. Ist

$$f(t) = \lambda_1 \cdot \cos(2\pi m_1 \nu t) + \dots + \lambda_k \cdot \cos(2\pi m_k \nu t) + \mu_1 \cdot \sin(2\pi n_1 \nu t) + \dots + \mu_\ell \cdot \sin(2\pi n_\ell \nu t)$$

so hat die nach dem Satz von Dirichlet existierende Fourierfolge F genau die Werte $a_i = \lambda_{m_i}$ und $b_i = \mu_{n_i}$.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, zeigen wir dies für den Fall $\mu_1 = 1$ und $n_1 = 1$ (und alle anderen Werte sind null), also

$$f(t) = \sin(2\pi\nu t).$$

Nach Satz 27 ist das Fourierreihenpaar eine Sinus-Fourierreihe, also sind alle $a_i = 0$. Wir müssen nur die Sinus-Koeffizienten berechnen. Hier haben wir

$$b_m = 2\nu \int_0^L \sin(2\pi m\nu\vartheta) \sin(2\pi\nu\vartheta) d\vartheta$$

und unsere Integralformeln (13) und (12) geben uns

$$b_m = \begin{cases} 2\nu \left[\frac{\sin(2\pi(m-1)\nu\vartheta)}{4\pi(m-1)\nu} - \frac{\sin(2\pi(m+1)\nu\vartheta)}{4\pi(m+1)\nu} \right]_0^L = 0 & \text{für } m \neq 1 \text{ und} \\ 2\nu \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{8\pi\nu} \sin(4\pi\nu\vartheta) \right]_0^L = 2\nu \frac{L}{2} = 1 & \text{für } m = 1. \end{cases}$$

Der allgemeine Beweis folgt dem gleichen Muster (allerdings muß man im Falle $\lambda_i \neq 0$ die entsprechende Kosinusintegralformeln (14) und (15) verwenden). Q.E.D.

Aufgabe 26. Führen Sie die Rechnungen im Beweis von Satz 28 für den Fall $f(t) = \cos(2\pi\nu t)$ durch.

5.3 Das Spektrum

Der Satz von Dirichlet erlaubt es uns nun, die folgenden Definitionen vorzunehmen: wir nennen die Funktion $f(t) = \sin(2\pi\nu t)$ den *Ton* mit der Frequenz ν ; wir nennen eine Funktion einen *Klang* mit der Grundfrequenz ν , falls sie $\frac{1}{\nu}$ -periodisch ist. Nach dem Satz von Dirichlet ist jeder Klang mit der Grundfrequenz ν aus Tönen der Frequenzen $m\nu$ für ganzzahlige m zusammengesetzt.

Theorem 29 (Satz von Cantor, 1870). Sei f eine $\frac{1}{\nu}$ -periodische Funktion mit einem Fourierreihenpaar F , so daß die Reihe f_F^ν punktweise gegen f konvergiert. Dann ist dieses Fourierreihenpaar eindeutig bestimmt.

Daher haben wir für einen $\frac{1}{\nu}$ -periodischen Klang f eine eindeutig bestimmtes Fourierfolgenpaar, welches wir das *Spektrum des Klangs* bezeichnen.

Wir wollen nun zeigen, daß das Spektrum uns beim Zusammenklingen von endlich vielen Tönen genau diese Töne wieder ausgibt.

Zunächst stellen wir fest, dass die Beschreibung des “Zusammenklingens” eine Einschränkung darstellt: wir erinnern uns daran, daß wir lediglich periodische Funktionen als *Klänge* bezeichnen wollen.

Satz 30. Seien $t \mapsto \sin(\alpha_1 t), \dots, t \mapsto \sin(\alpha_n t)$ endliche viele Töne. Falls die Funktion $t \mapsto \sum_{i=1}^n \sin(\alpha_i t)$ periodisch ist, so gibt es eine Zahl α , so daß alle α_i rationale Vielfache von α sind.

Beweis. Wir zeigen lediglich einen illustrativen Spezialfall: sei $\xi \in \mathbb{R}$; dann ist $t \mapsto \sin(t) + \sin(\xi t)$ periodisch genau dann, wenn ξ rational ist.

“ $\Leftarrow$ ”. Falls $\xi = \frac{k}{\ell}$, so liefert Lemma 3, daß beide Funktionen $2\pi\ell$ -periodisch sind und somit auch die Summe.

“ $\Rightarrow$ ”. Nehmen wir nun für einen Widerspruch an, daß ξ irrational ist und $t \mapsto \sin(t) + \sin(\xi t)$ periodisch mit Periode $2p$ sei (wir wählen $2p$, damit die Formeln in der folgenden Rechnung einfacher werden): Wir erhalten

$$\sin(t) + \sin(\xi t) = \sin(t + 2p) + \sin(\xi(t + 2p)),$$

also

$$\sin(t) - \sin(t + 2p) = \sin(\xi t + 2\xi p) - \sin(\xi t).$$

Die Additionstheoreme geben uns:

$$2 \cos(t + p) \sin(p) = -2 \cos(\xi t + \xi p) \sin(\xi p). \quad (28)$$

Setzen wir nun in (28) $t := \frac{\pi}{2} - p$ ein, so erhalten wir

$$0 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(p) = -2 \cos\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \sin(\xi p).$$

Auf der rechten Seite steht also ein Produkt, welches Null ergibt, also muß mindestens einer der beiden Faktoren Null sein. Aber da ξ irrational war, ist $\xi \frac{\pi}{2}$ keine Nullstelle des Kosinus, also ist $\sin(\xi p)$ Null. Wir wissen also, daß $\xi p = k \cdot \pi$ für ein geeignetes k .

Setzen wir nun in (28) $t := \frac{\pi}{2\xi} - p$ ein, so erhalten wir

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2\xi}\right) \sin(p) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\xi p) = 0,$$

und mit dem gleichen Argument ist $\cos\left(\frac{\pi}{2\xi}\right) \neq 0$ und daher $\sin(p) = 0$, also gibt es ein geeignetes ℓ , so daß $p = \ell \cdot \pi$. Aber dann ist

$$\xi = \frac{\xi p}{p} = \frac{k \cdot \pi}{\ell \cdot \pi} = \frac{k}{\ell},$$

also rational im Widerspruch zur Annahme.

Q.E.D.

Der Satz von Cantor und Satz 30 zusammen bilden nun die Antwort auf die Frage, warum wir aus Kompositionen von Tönen die ursprünglichen Konstituenten rekonstruieren können: nehmen wir an, daß endlich viele Töne $f_1(t) = \lambda_1 \sin(2\pi\nu_1 t)$, ..., $f_n(t) = \lambda_n \sin(2\pi\nu_n t)$ mit paarweise verschiedenen Frequenzen ν_i als Sinus-Funktionen auf unser Ohr treffen. Die Schwingung des Trommelfells ist also die Summe dieser Funktionen

$$t \mapsto f_1(t) + \dots + f_n(t).$$

Nach Definition nehmen wir dies nur als Klang wahr, wenn diese Funktion periodisch ist: wir können also nach Satz 30 annehmen, daß es rationale Zahlen $q_1 = \frac{k_1}{\ell_1}$, ..., $q_n = \frac{k_n}{\ell_n}$ und eine Frequenz ν gibt, so daß $\nu_i = q_i \nu$. Bilden wir den gemeinsamen Hauptnenner $N := \ell_1 \cdot \dots \cdot \ell_n$, so sind alle Funktionen $\frac{N}{\nu}$ -periodisch und haben somit nach dem Satz von Dirichlet und dem

Satz von Cantor ein eindeutiges Fourierfolgenpaar (in diesem Falle, da alle Funktionen Sinusfunktionen, also ungerade waren, wissen wir sogar, dass es sich um eine Sinus-Fourierfolge handelt). Diese Sinus-Fourierfolge muß also exakt die ursprünglichen Funktionen entsprechen, also $b_{\ell_1 \dots \ell_{i-1} \cdot k_i \cdot \ell_{i+1} \dots \ell_n} = \lambda_i$.

Die im Spektrum auftauchenden Töne bezeichnen wir als *Obertöne*. Ist die Grundfrequenz ν , so heißt

der Ton $t \mapsto \sin(2\pi\nu t)$	der Grundton,
der Ton $t \mapsto \sin(4\pi\nu t)$	der erste Oberton,
der Ton $t \mapsto \sin(6\pi\nu t)$	der zweite Oberton,
der Ton $t \mapsto \sin(8\pi\nu t)$	der dritte Oberton,
der Ton $t \mapsto \sin(10\pi\nu t)$	der vierte Oberton,
der Ton $t \mapsto \sin(12\pi\nu t)$	der fünfte Oberton,
der Ton $t \mapsto \sin(14\pi\nu t)$	der sechste Oberton, usw.

Man beachte, daß der m te Oberton der Funktion $t \mapsto \sin(2\pi(m+1)\nu t)$ entspricht, also genau um eine Zahl versetzt; den Grundton könnte man in dieser Nomenklatur als „nullten Oberton“ bezeichnen. Eine leicht andere Terminologie ist die der sogenannten *Harmonischen*. Wir nennen die Funktion $t \mapsto \sin(2\pi m\nu t)$ die m te *Harmonische zur Frequenz ν* , also ist der Grundton die erste Harmonische, der erste Oberton die zweite Harmonische, der zweite Oberton die dritte Harmonische, usw.

Wir stellen fest, daß das Frequenzenverhältnis zwischen dem aufeinanderfolgenden Harmonischen gerade $\frac{n+1}{n}$ ist, also z.B. $\frac{2}{1}$ zwischen der ersten und zweiten Harmonischen, $\frac{3}{2}$ zwischen der zweiten und dritten Harmonischen, $\frac{4}{3}$ zwischen der dritten und vierten Harmonischen, $\frac{5}{4}$ zwischen der vierten und fünften Harmonischen, $\frac{6}{5}$ zwischen der fünften und sechsten Harmonischen usw. Dies sind die kleinen ganzzahligen Zahlverhältnisse aus dem pythagoräischen Prinzip.

5.4 Spektren von Instrumenten

Die in der musikalischen Praxis auftauchenden Klänge sind keine Töne, sondern Klänge mit komplexen Spektren. Dies erlaubt es uns, zwischen verschiedenen Instrumenten zu unterscheiden, wenn wir sagen, daß sie „denselben Ton spielen“. Wenn wir sagen, daß eine Violine und eine Klarinette „den Ton A = 220 Hz spielen“, so meinen wir nicht, daß sie eine Sinus-Schwingung mit Frequenz 220 Hz erzeugen, sondern daß sie einen Klang mit Grundfrequenz 220 Hz erzeugen. Das Spektrum dieses Klangs ist ein komplexes Zusammenspiel des Tons mit der Frequenz 220 Hz mit seinen Obertönen (also die Töne mit den Frequenzen 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz, usw.) Diese Zusammensetzung, also die Fourierkoeffizienten in der Fourierfolge, sind es, die den charakteristischen Klang des Instrumentes ausmachen.

Die folgenden Werte sind stark vereinfachte Approximationen der Spektren von Flöte, Geige und Klarinette. Man stellt fest, daß die Flöte nur relativ wenige Obertöne hat, während die Geige noch bei der zehnten Harmonischen nichttriviale Koeffizienten hat. Bei der Klarinette fällt auf, daß nur die ungeradezahligen Koeffizienten auftauchen.

Instrument	1ν	2ν	3ν	4ν	5ν	6ν	7ν	8ν	9ν	10ν
Flöte	1	1	.1	.2	.2	0	0	0	0	0
Geige	1	.6	.6	.7	.4	.2	.4	.3	.4	.4
Klarinette	1	0	.4	0	.2	0	.1	0	0	0

Diese sehr charakteristischen Spektren erlauben es uns, die Einzelinstrumente auch beim Zusammenklang wiederzuerkennen. Haben wir z.B. ein Klangspektrum mit den folgenden Werten, so können wir dies als Zusammenspiel einer Geige mit 300 Hz, einer Klarinette mit 400 Hz und einer Flöte mit 500 Hz, alle mit gleicher Amplitude, erkennen.

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
0+			1	1	1	.6			.6	
1000+		2.1			.4			.3		
2000+	.4			.5			.4	.1		.6

Diese mathematische Rekonstruktion der Einzelklänge ist allerdings nicht immer möglich. Für ein vereinfachtes Beispiel nehmen wir an, wir hätten zwei sehr einfache fiktive Instrumente, nennen wir sie „Prima“ und „Secunda“ mit den in der folgenden Tabelle gegebenen Spektren.

Instrument	1ν	2ν	3ν
Fiktives Instrument 1: Prima	1	1	0
Fiktives Instrument 2: Secunda	1	0	.5

Wenn wir nun einen Klang mit dem folgenden Spektrum hören, so können wir nicht entscheiden, ob es sich um das Zusammenspiel zweier Primas handelt, eine mit voller Amplitude und 200 Hz und die andere mit halber Amplitude mit 600 Hz—oder aber um das Zusammenspiel zweier Sekundas, beide mit voller Amplitude und eine mit 200 Hz und eine mit 400 Hz.

100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
0	1	0	1	0	.5	0	0	0	0	0	.5

5.5 Die Quadratwelle

Wir wollen nun ein konkretes Beispiel geben. Die periodische Funktion, die am besten den Klang einer Klarinette wiedergibt, ist die sogenannte *Quadratwelle*, definiert durch

$$s(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 2\pi k \leq t < 2\pi(k+1) \text{ und} \\ -1 & \text{falls } 2\pi(k+1) \leq t < 2\pi(k+2). \end{cases}$$

Man beachte, dass die Quadratwelle nicht stetig ist: sie hat Unstetigkeitsstellen bei allen ganzzahligen Vielfachen von π . Somit ist sie auch nicht stetig differenzierbar und wir können den

Satz von Dirichlet nicht direkt auf die Quadratwelle anwenden. Es ist eine der bemerkenswerten Eigenschaften der Theorie der Fourierreihen, daß die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nicht benötigt werden: eine stückweise Differenzierbarkeit mit endlich vielen Ausnahmestellen innerhalb der Periode reicht aus.

Eine periodische Funktion f mit Periode L heißt *stückweise stetig differenzierbar*, falls es endlich viele *Ausnahmepunkte* $0 \leq a_1 < \dots < a_n \leq L$ gibt, so daß die Einschränkungen $f|_{(a_i, a_{i+1})}$ (für $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := L$) stetig differenzierbar sind.

Theorem 31 (Verallgemeinerter Satz von Dirichlet). Ist f eine $\frac{1}{\nu}$ -periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion mit Ausnahmepunkten $a_1, \dots, a_n$, so gibt es ein Fourierfolgenpaar F , so daß für alle $t \in (0, p) \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ gilt $f(t) = f_F^\nu(t)$. Die Koeffizienten werden wie im regulären Satz von Dirichlet berechnet.

Die Quadratwelle ist eine ungerade Funktion, so daß wir nach Satz 27 wissen, daß wir eine Sinus-Fourierfolge erhalten werden. Wir müssen also nur die Fourierkoeffizienten b_m ausrechnen. Unsere Quadratwelle hat Periode $L = 2\pi$ und somit Frequenz $\nu = 1/2\pi$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m\vartheta) \cdot s(\vartheta) \, d\vartheta \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin(m\vartheta) \cdot 1 \, d\vartheta + \int_\pi^{2\pi} \sin(m\vartheta) \cdot (-1) \, d\vartheta \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin(m\vartheta) \, d\vartheta - \int_\pi^{2\pi} \sin(m\vartheta) \, d\vartheta \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{m} \cos(m\vartheta) \right]_0^\pi - \left[-\frac{1}{m} \cos(m\vartheta) \right]_\pi^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{m} \cos(m\pi) - \left(-\frac{1}{m} \cos(0) \right) \right) - \left(-\frac{1}{m} \cos(2m\pi) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{m} \cos(m\pi) + \frac{1}{m} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{m\pi} (1 - \cos(m\pi)),
 \end{aligned}$$

also

$$b_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade und} \\ \frac{4}{\pi m} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Man erkennt, daß die geradzahligen Harmonischen verschwinden und lediglich die ungeradzahligen Harmonischen übrigbleiben. Dies entspricht der Angabe des Spektrums der Klarinette auf S. 40.

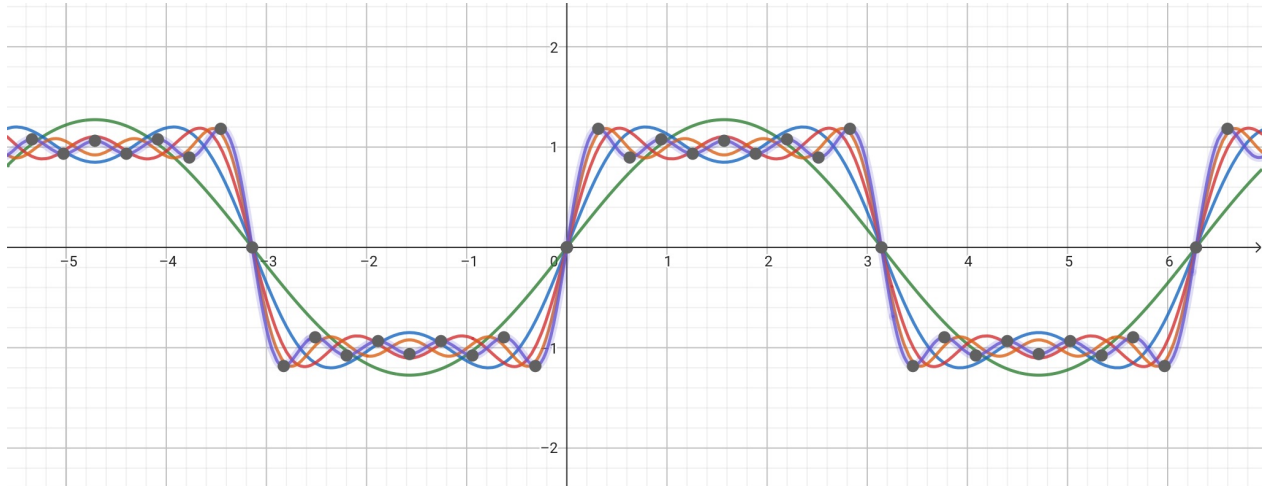


Abbildung 6: Approximation der Quadratwelle durch die endliche Fouriersumme $\frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7x) + \frac{4}{9\pi} \sin(9x)$ mit den fünf Approximationsschritten markiert in grün, blau, rot, orange und violett.

Aufgabe 27. Die folgende Funktion ist die Kosinusvariante der Quadratwelle:

$$k(\vartheta) := \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{1}{4\nu} \leq \vartheta < \frac{1}{4\nu} \text{ und} \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{4\nu} \leq \vartheta < \frac{3}{4\nu}, \end{cases}$$

$\frac{1}{\nu}$ -periodisch fortgesetzt. Wir wollen sie die *Kosinusquadratwelle* nennen. Überlegen Sie sich, daß es sich um eine gerade Funktion handelt. Daher besteht ihre Fourierreihe aus den Kosinuskoeffizienten a_m (und für alle Sinuskoeffizienten gilt $b_m = 0$). Berechnen Sie mittels der Formeln in Dirichlets Theorem die Fourierkoeffizienten. Überlegen Sie sich, daß die Kosinusquadratwelle k eine Phasenverschiebung der Quadratwelle um $\frac{1}{4\nu}$ ist, also: $k(\vartheta) = s(\vartheta + \frac{1}{4\nu})$. Können Sie mit dieser Überlegung die Fourierkoeffizienten der Kosinusquadratwelle direkt aus den Fourierkoeffizienten der Quadratwelle bestimmen?

Betrachten wir nun die Approximation der Quadratwelle durch die endlichen durch die Fourierreihe gegebenen Summen, so ergibt sich das Bild in Abbildung 5.5.

5.6 Gibbs-Phänomen

Wenn Sie sich die Unstetigkeitsstellen (z.B. $x = 0$) in Abbildung 5.5 genauer ansehen, so stellen Sie fest, daß die Approximationen zwischen den Unstetigkeitsstellen oszillieren, also Werte annehmen, die kleiner sind als -1 bzw. größer sind als 1 . Man erkennt bereits in den ersten fünf Approximationsstufen, daß diese Oszillation nicht flacher wird, umso mehr Terme wir der endlichen Fouriersumme hinzufügen: kurz vor der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ schwingt die Kurve unter -1 , um dann durch den Ursprung zu verlaufen, ein wenig über die 1 hinauszuschiesen und dann um die 1 zu oszillieren.

Hz	100	113	127	133	150	169	190	200	226	254	266	300	338	380
Erster Klang	1							8						
Zweiter Klang		2							7					
Dritter Klang			3							6				
Vierter Klang				4							5			
Fünfter Klang					5							4		
Sechster Klang						6							3	
Siebter Klang							7							2
Achter Klang	[1]							[8]						
usw.														

Abbildung 7: Eine vereinfachte Shepard-Tonleiter

Diese Ausreißer an den Unstetigkeitsstellen sind kein Zufall; es handelt sich hier um ein allgemeines Phänomen beim Approximieren nichtstetiger Funktionen durch Fouriersummen. Man nennt dies das *Gibbs-Phänomen* nach Josiah Willard Gibbs (1839–1903): approximiert man eine nichtstetige Funktion durch endliche Approximation einer Fourierreihe, so konvergiert diese Reihe an den Unstetigkeitsstellen nicht gleichmäßig, sondern nur ungleichmäßig. D.h. (im Falle der Quadratwelle) für jedes $\varepsilon > 0$ wird $f(\varepsilon)$ zu irgendeiner Approximationsstufe k dicht bei 1 liegen, aber links von diesem ε wird es an der Approximationsstufe k immer noch Ausreißer geben, die deutlich größer als 1 sind. Mit wachsendem k liegen diese Ausreißer immer dichter bei der Null, ihr Abstand zur Zahl 1 wird jedoch nicht geringer. Man kann ausrechnen, daß diese Ausreißer ca. 8,9% der Höhe der Unstetigkeit betragen; in diesem Falle also $1 - (-1) = 2$; somit ca. 0,18, was man gut in Abb. 5.5 erkennen kann.

Das Gibbs-Phänomen erlaubt es uns, einen digital generierten Klang, der wegen der digitalen Natur der Speicherung nur eine endliche Approximation sein kann, von einem echten analogen Klang zu unterscheiden.

5.7 Die Shepard-Tonleiter

In der Praxis hören wir praktisch nie Töne, sondern immer nur Klänge: jeder in der Natur auftretende Klang hat immer zumindest einige Anteile seiner Harmonischen im Spektrum. Dies veranlaßte den amerikanischen Kognitionswissenschaftler Roger Shepard (1929–2022), eine auditive Illusion zu schaffen, die sogenannte *Shepard-Tonleiter*.⁹

Wir fangen mit einem Klang an, dessen Grundton sehr leise und erster Oberton sehr laut ist. Dieser Klang wird als der Oberton wahrgenommen. Wir schreiten in der Tonleiter voran, indem wir jeweils den Grundton etwas in der Amplitude erhöhen und den Oberton etwas verringern. Da beide Töne, aus denen der Klang besteht, in jedem Einzelschritt leicht in der Frequenz ansteigen, empfinden wir diese Folge als eine ansteigende Tonleiter.

Nach sieben Tönen ist allerdings nun der Grundton laut und der Oberton leise, so daß wir beim achten Ton unmerklich zum ursprünglichen ersten Ton wechseln können. Das Ohr nimmt hauptsächlich den Anstieg vom siebten Grundton auf den ersten Oberton wahr und überhört die Tatsache, daß wir den Oberton verlieren und stattdessen wieder einen neuen Grundton hinzufügen; s. Abb. 7.

⁹Roger N. Shepard. Circularity in judgments of relative pitch. *Journal of the Acoustical Society of America* 36:12 (1964), 2346–2353.

6 Harmonie

6.1 Wohlklänge & Psychoakustik

In Kapitel 5 haben wir gelernt, daß *Klänge* stets aus einem Fourierspektrum von trigonometrischen Funktionen ist, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind. Dies erklärt, warum ganzzahlige Brüche eine Rolle für das Klangerleben spielen, aber es erklärt noch nicht das pythagoräische Prinzip, welches eine Abhängigkeit zwischen Wohlklang und der Größe der Zahlkoeffizienten postuliert: desto kleiner die Verhältnisse, desto wohlklingender.

Mit der Frage nach *Wohlklang* verlassen wir das rein mathematische Gebiet und bewegen uns in den Bereich der Psychoakustik: die Mathematik kann höchstens feststellen, daß es einen quantitativen oder qualitativen Unterschied zwischen zwei Klängen gibt, nicht aber, ob und warum wir den einen als wohlklingender als den anderen empfinden sollten.

Harmonizität. Betrachten wir nun zwei Klänge mit Grundfrequenzen $n\nu$ und $m\nu$, wobei n und m kleine ganze Zahlen sind. Das Spektrum des ersten Klangs besteht aus Tönen der Frequenzen $nk\nu$, das Spektrum des zweiten Klangs aus Tönen der Frequenzen $mk\nu$. Um so kleiner die Zahlen m und n sind, desto mehr überlappen diese Spektren: ist $n = 1$, so sind alle Obertöne des zweiten Klangs auch Obertöne des ersten; ist $n = 2$ und $m = 3$, so ist jeder zweite Oberton des zweiten Klangs auch ein Oberton des ersten. Das erklärt zumindest, warum bei Klängen (nicht notwendigerweise bei Tönen) die Klänge desto ähnlicher oder verwandter klingen, desto kleiner das Zahlverhältnis der Frequenzen ist. Für diese Eigenschaft wollen wir den Begriff *spektrumsähnlich* einführen: um so kleiner das ganzzahlige Verhältnis zwischen den Grundfrequenzen ist, desto spektrumsähnlicher sind die beiden Klänge. In der Literatur wird größere Spektrumsähnlichkeit oft als *Harmonizität* bezeichnet.

Aufgabe 28. Seien f und g Klänge der Grundfrequenzen 4ν und 6ν . Überlegen Sie sich, wie spektrumsähnlich f und g zueinander sind. Erklären Sie die beiden Klänge zusammen, welches Intervall nehmen wir wahr?

Wir können nun das *pythagoräische Prinzip* mit dieser Terminologie umformulieren:

Um so größer die Harmonizität eines Klangs ist, desto wohlklingender empfinden wir ihn.

Ob das pythagoräische Prinzip zutrifft oder nicht ist eine empirische Frage, die man mit Experimenten erforschen kann.

Rauhigkeit. Das Gebiet der Psychoakustik verwendet experimentelle Methoden der Kognitionswissenschaft, um festzustellen, welche Klangerfahrungen wir als wohlklingend oder nicht wohlklingend empfinden. Empirische Untersuchungen werfen Zweifel am pythagoräischen Prinzip auf und legen nahe, daß Harmonizität nicht der einzige Grund für Wohlklangempfindung sein kann. Ein frühes Werk der Psychoakustik ist *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* (1863) von Hermann von Helmholtz (1821–1894), in dem er auf die zusätzliche Rolle von Schwebungen eingeht.

Von Helmholtz' Theorie basiert auf dem Phänomen Schwebungen, die wir in Abschnitt 3.4 kennengelernt haben: zwei Töne mit Frequenz $\nu - \varepsilon$ und $\nu + \varepsilon$ erzeugen einen Ton mit Frequenz ν und eine Schwebung mit Frequenz ε . Ist ε sehr klein (z.B. 1 Hz oder 2 Hz), so nehmen wir die Schwebung nicht als Ton wahr, sondern als Auf- und Abschwellen des Haupttons. Ist ε größer (z.B. 20 Hz), so hören wir die Schwellung als ein Brummen oder einen Störton: dieses Phänomen wird als *Rauhigkeit* bezeichnet. Von Helmholtz ging davon aus, daß Klänge mit größerer Rauhigkeit als unangenehm empfunden werden.

Sind allerdings $\nu - \varepsilon$ und $\nu + \varepsilon$ Vielfache einer Grundfrequenz μ , also z.B. $\nu - \varepsilon = k\mu$ und $\nu + \varepsilon = \ell\mu$, so sind $\nu = (\ell + k)\frac{\mu}{2}$ und $\varepsilon = (\ell - k)\frac{\mu}{2}$; der Ton und die Schwebung sind also beide Vielfache derselben Grundfrequenz und somit sind sie beide Harmonische dieser Grundfrequenz. In diesen Fällen verschwindet also die Rauhigkeit. Sind k und ℓ kleine Zahlen, so sind ν und ε spektrumsähnlich im obigen Sinne. (Betrachten Sie z.B. den Grenzfall, daß $\varepsilon = \nu$, also $k = \ell = 1$. In diesem Falle haben die Schwebung und der Ton dieselbe Frequenz.)

Aufgabe 29. Verwenden Sie die Schwebungsformel

$$\sin(\nu x + \varepsilon x) + \sin(\nu x - \varepsilon x) = 2 \sin(\nu x) \cdot \cos(\varepsilon x),$$

um die Rauhigkeit eines Zusammenklangs von zwei Tönen der Frequenzen 440 Hz und 425 Hz zu ermitteln. Warum ist der Zusammenklang der errechneten Sinusschwingung mit der Kosinusmodulation nicht spektrumsähnlich?

Gewohntheit. Heutzutage geht man in der Psychoakustik davon aus, daß das Wohlklangsempfinden eine komplexe Kombination aus Harmonizität, Rauhigkeit und *Gewohntheit* ist, wobei die Gewohntheit kein rein physikalisches Phänomen ist, sondern von den sozialen Gegebenheiten des Hörers abhängt. Klänge, die den üblichen Klängen in der Musik der Kultur des Hörers entsprechen, werden eher als wohlklingend empfunden als andere Klänge.

Auch wenn die strenge Lesart des pythagoräischen Prinzips heutzutage als widerlegt gilt, so tragen kleine ganzzahlige Frequenzverhältnisse wesentlich zu größerer Harmonizität und geringerer Rauhigkeit bei und sind somit empirisch wichtige Faktoren in unserem Wohlklangsempfinden.

Wir wollen also in unserer folgenden Analyse von Harmonien davon ausgehen, daß es für harmonische Zwecke nützlich ist, Tonintervalle spielen zu können, die kleinen ganzzahligen Vielfachen von Frequenzen entsprechen. Die Tonintervalle zwischen den ersten Obertönen entsprechen dabei den traditionellen Tonintervallen, die Sie aus dem Musikunterricht kennen wie in Abbildung 8 aufgelistet.

Aufgabe 30. Nehmen Sie an, daß wir einen Grundton der Frequenz ν haben. Gehen Sie vom Grundton eine große Terz nach unten, dann eine Oktave nach oben, dann eine Quarte nach unten. Geben Sie die Frequenz ν' des letzten Tons an. Beschreiben Sie das Tonintervall zwischen ν und ν' mit einem Tonintervallnamen.

	Frequenz	Verhältnis	Bezeichnung
Grundton	$1 \cdot \nu$	1	
Erster Oberton	$2 \cdot \nu$	2 : 1	Oktave
Zweiter Oberton	$3 \cdot \nu$	3 : 2	Quinte
Dritter Oberton	$4 \cdot \nu$	4 : 3	Quarte
Vierter Oberton	$5 \cdot \nu$	5 : 4	Große Terz
Fünfter Oberton	$6 \cdot \nu$	6 : 5	Kleine Terz
Sechster Oberton	$7 \cdot \nu$	7 : 6	
Siebter Oberton	$8 \cdot \nu$	8 : 7	
Achter Oberton	$9 \cdot \nu$	9 : 8	Sekunde

Abbildung 8: Die Tonintervalle, welche durch die ersten Obertöne erzeugt werden und ihre Tonintervallnamen.

Andere übliche Bezeichnungen sind *kleine Sexte* für das Verhältnis 8:5, *große Sexte* für das Verhältnis 5:3, *Septime* für das Verhältnis 7:4, *Duodezime* für das Verhältnis 3:1 und *Doppeloktave* für das Verhältnis 4:1.

6.2 Oktavaufteilungen

In harmonischer Musik wollen wir also möglichst viele Klänge mit kleinen ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz zusammenbringen, also zu einem Ton der Frequenz ν auch die Frequenzen $q \cdot \nu$ zu erzeugen, wobei q ein Bruch mit kleinen ganzzahligem Zähler und Nenner ist.

Die menschliche Stimme und einige Instrumente (z.B. Streichinstrumente oder die Posaune) sind in der Lage, jede Frequenz zu erzeugen; andere Instrumente (z.B. die meisten Blasinstrumente, Tasteninstrumente oder Instrumente, bei denen jeder Ton seinen eigenen Klangkörper benötigt, wie die Pauke) haben eine fest vorgegebene Liste von erzeugbaren Tönen. Die Instrumentenbauerin oder der Instrumentenbauer muß also bei der Herstellung des Instruments eine Entscheidung fällen, welche Töne erzeugbar sein sollen.

Diese Situation hat zur der Einführung der *Tonleiter* geführt, die die Oktave in zwölf Halbtonschritte aufteilt. Diese Zwölftteilung folgt nicht offensichtlich aus der Diskussion der Harmonie, ist aber auch nicht vollständig willkürlich. Die pythagoräische Musiktheorie spielt bei der Wahl der Zahl 12 eine wesentliche Rolle. Für diese Diskussion wollen wir einen Ton der Frequenz ν und seine Oktave 2ν miteinander identifizieren. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir die Grundfrequenz $\nu = 1$. Die relevanten Töne sind also nunmehr diejenigen im abgeschlossenen Intervall $[1, 2]$, wobei der unterste Punkt die Grundfrequenz ist und der oberste die Oktave. Wir nennen dieses Intervall den *Oktavbereich*.

Der Abstand zwischen zwei Tönen $x, y \in [1, 2]$ im Oktavbereich mit $x < y$ ist durch den Quotienten $\frac{y}{x}$ gegeben: der Quotient misst das Verhältnis der Frequenzen zwischen den beiden Tönen. Ist der Quotient z.B. $\frac{3}{2}$, so ist das Tonintervall $x : y$ eine Quinte.

Wichtige Bemerkung. Der Abstand zwischen Tönen wird *multiplikativ* gemessen, nicht additiv. Ein Tonintervall zu halbieren, heißt also die Wurzel zu ziehen: vom Ton x erreiche

ich den Ton $y > x$, indem ich zweimal mit dem Tonintervall $\sqrt{\frac{y}{x}}$ nach oben schreite.

Lemma 32. Für jede positive rationale Zahl q gibt es eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$q = \prod_{p \text{ Primzahl}} p^{z_p},$$

wobei $z_p \in \mathbb{Z}$ und $z_p = 0$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p .

Beweis. Da $q = \frac{n}{m}$ für natürliche Zahlen n und $m \neq 0$, finde Primfaktorzerlegungen für $n = \prod p^{n_p}$ und $m = \prod p^{m_p}$. Setze $z_p := n_p - m_p$ und erhalte $q = \prod p^{z_p}$. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, daß $q = \prod p^{z_p} = \prod p^{y_p}$ und definieren

$$k_p := \begin{cases} -z_p & \text{falls } z_p < 0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\ell_p := \begin{cases} -y_p & \text{falls } y_p < 0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$\hat{z}_p := z_p + k_p + \ell_p$ und $\hat{y}_p := y_p + k_p + \ell_p$. Dann sind $\hat{z}_p$ und $\hat{y}_p$ natürliche Zahlen und somit auch $k := \prod p^{k_p}$, $\ell := \prod p^{\ell_p}$ und $q \cdot k \cdot \ell = \prod \hat{z}_p = \prod \hat{y}_p$. Nach der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen gilt somit, daß $\hat{z}_p = \hat{y}_p$ für alle Primzahlen p und daher $z_p = y_p$ für alle Primzahlen p . Q.E.D.

Wir stellen fest, dass die Primfaktorzerlegung, in der $z_p = 0$ für alle p , die Zahl 1 ergibt; die Primfaktorzerlegungen, in denen lediglich die Exponenten der Primzahl 2 ungleich null sind, geben uns genau die sogenannten *dyadischen Zahlen*, also 2, 4, 8, 16, usw. und $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, usw. Man beachte, dass keine dieser Zahlen strikt zwischen 1 und 2 liegt. Also gilt: falls $q \in (1, 2)$, so gibt es eine Primzahl $p \neq 2$, so dass $z_p \neq 0$ in der Primfaktorzerlegung von q .

Nach den Potenzregeln entspricht das Multiplizieren von rationalen Zahlen dem Addieren der Exponenten in der Primfaktorzerlegung. Also, falls $q = \prod p^{z_p}$ und $r = \prod p^{y_p}$, so ist

$$q \cdot r = \prod p^{z_p + y_p}; \text{ insbesondere ist}$$

$$q^2 = \prod p^{2 \cdot z_p} \text{ und}$$

$$q^n = \prod p^{n \cdot z_p}. \quad (29)$$

Eine beliebige Zahl $q \in (1, 2)$ entspricht einem Tonintervall: ist $x \in [1, 2]$ ein beliebiger Ton in unserem Oktavbereich, so ist $q \cdot x$ der um das Tonintervall q erhöhte Ton und x/q der um das Tonintervall q erniedrigte Ton. Nicht in jedem Falle liegen diese Töne wieder im Oktavbereich.

Lemma 33. Für jede positive reelle Zahl $x > 0$ gibt es ein eindeutiges $z \in \mathbb{Z}$, so daß $x \cdot 2^z \in [1, 2)$. Wir bezeichnen diese als den *Repräsentanten von x im Oktavbereich* $o(x)$.

Beweis. Zunächst zur Eindeutigkeit: falls $y \in [1, 2)$, so ist $y \cdot 2^z \in [2^z, 2^{z+1})$. Für jedes $z \neq 0$ ist $[2^z, 2^{z+1}) \cap [1, 2) = \emptyset$. Ist also $x \cdot 2^z \in [1, 2)$, so haben wir für jedes $z' \neq z$, daß $x \cdot 2^{z'} = x \cdot 2^z \cdot 2^{z'-z} \notin [1, 2)$.

Ist $x < 1$, so gilt, dass $(x \cdot 2^n; n \in \mathbb{N})$ eine unbeschränkte Folge ist. Also gibt es ein kleinstes n , so daß $x \cdot 2^{n+1} \geq 1$. Wegen der Minimalität von n gilt, daß $x \cdot 2^n < 1$, aber dann gilt $x \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot x \cdot 2^n < 2 \cdot 1 = 2$, also ist $x \cdot 2^{n+1} \in [1, 2)$.

Ist $x > 2$, so gilt, dass $(x/2^n; n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge ist. Also gibt es ein kleinstes n , so daß $x/2^{n+1} < 2$. Wegen der Minimalität von n gilt, daß $x/2^n \geq 2$, aber dann gilt $x/2^{n+1} = 1/2 \cdot x/2^n \geq 1/2 \cdot 2 = 1$, also ist $x/2^{n+1} \in [1, 2)$. Q.E.D.

Vergleichen wir eine rationale Zahl q mit ihrer Repräsentation im Oktavbereich $o(q)$, so stellen wir fest, dass sich ihre Primfaktorzerlegungen lediglich im Exponenten der Primzahl 2 unterscheiden können, da $o(q) = 2^z \cdot q$ für ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, daß eine Zahl im Oktavbereich eindeutig durch die Exponenten der Primzahlen $p \neq 2$ in ihrer Primfaktorzerlegung bestimmt ist.

Definition 34. Eine *Oktavaufteilung in n Töne* ist eine endliche Menge von Zahlen $1 = q_1 < q_2 < \dots < q_{n+1} = 2$.

Definition 35. Eine Teilmenge $X \subseteq [1, 2)$ ist unter dem Tonintervall $q \in (1, 2)$ abgeschlossen, falls gilt: wenn $x \in X$, so sind auch $o(x \cdot q)$ und $o(x/q)$ in X .

Satz 36. Falls $q \in (1, 2)$ eine rationale Zahl ist, so ist keine Oktavaufteilung unter q abgeschlossen.

Beweis. Sei $X = \{q_1, \dots, q_m\}$ eine Oktavaufteilung (mit $q_1 = 1$ und $q_m = 2$). Wir schreiben $q = \prod p^{z_p}$ als Primfaktorzerlegung nach Lemma 32. Wie bemerkt, muss es ein $p \neq 2$ geben, so daß $z_p \neq 0$. Ist X unter q abgeschlossen, so gilt insbesondere, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $o(q^n)$ in X liegt. Nach unserer vorigen Bemerkung über die Primfaktorzerlegung der Repräsentation im Oktavbereich und (29) gilt, dass der Exponent für die Primzahl p in $o(q^n)$ gerade $n \cdot z_p$ ist. Aber diese Zahlen sind unterschiedlich für unterschiedliche Wahlen von n . Somit sind die Zahlen $o(q^n)$ paarweise verschieden und daher unendlich viele. Aber X war eine endliche Menge. Widerspruch! Q.E.D.

Das Analogon von Satz 36 für irrationale Zahlen gilt nicht: geben wir eine natürliche Zahl n vor, so bildet

$$E := \{(\sqrt[n]{2})^{k-1}; 1 \leq k \leq n+1\}$$

eine unter $\sqrt[n]{2}$ abgeschlossene Oktavaufteilung: ist $x = (\sqrt[n]{2})^k \in E$, so ist auch $\sqrt[n]{2} \cdot x = (\sqrt[n]{2})^{k+1} \in E$. Man sieht leicht, daß E generell unter $(\sqrt[n]{2})^k$ abgeschlossen ist. Bei einer solchen Oktavaufteilung sind die Tonintervalle zwischen den in der Aufteilung auftretenden Tönen identisch; wir sprechen daher auch von einer *gleichstufigen Oktavaufteilung*.

Lemma 37. Für jedes $n > 1$ ist $\sqrt[n]{2}$ irrational. Allgemeiner: falls $1 \leq k < n$, so ist $(\sqrt[n]{2})^k$ irrational.

Beweis. Dies ist eine einfache Verallgemeinerung des bekannten Beweises, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.¹⁰ falls $\sqrt[n]{2} = q \in \mathbb{Q}$, so gibt es nach Lemma 32 eine eindeutige Primfaktorzerlegung

¹⁰Wie in Abschnitt 1.2 erwähnt, wird dieses Ergebnis üblicherweise dem Pythagoräer Hippasos von Metapont zugeschrieben.

$q = \prod p^{z_p}$. Aber dann ist $q^n = 2 = \prod p^{n \cdot z_p}$. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von 2 erhalten wir $n \cdot z_2 = 1$, also ist $n = 1$ und $z_2 = 1$.

Ebenso: ist $(\sqrt[n]{2})^k = q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \prod p^{z_p}$, so ist $q^n = ((\sqrt[n]{2})^k)^n = (\sqrt[n]{2})^{kn} = ((\sqrt[n]{2})^n)^k = 2^k$. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von 2^k erhalten wir $n \cdot z_2 = k$, also $z_2 = k/n$. Falls $1 \leq k < n$, so ist dies keine ganze Zahl: dies ist ein Widerspruch. Q.E.D.

In einer gleichstufigen Oktavaufteilung finden sich also nach Lemma 37 bis auf den Grundton 1 und die Oktave 2 keinerlei rationalen Tonintervalle. Aber rationale Tonintervalle können durch eine gleichstufige Oktavaufteilung approximiert werden, indem wir n groß wählen und ein k finden können, so daß $|q - (\sqrt[n]{2})^k|$ sehr klein wird.

Beispiel. Wollen wir in einer gleichstufigen Oktavaufteilung das Tonintervall $3/2$ (also eine Quinte) approximieren, so können wir die Oktave z.B. in 1.000 gleichstufige Schritte der Länge $\sqrt[1000]{2}$ aufteilen. Dann ist

$$(\sqrt[1000]{2})^{585} \approx 1,500038 \approx 3/2.$$

Aufgabe 31. Betrachten Sie die gleichstufige Oktavaufteilung in 24 Töne. Berechnen Sie die 24 Töne und bestimmen Sie, welche der Obertöne wir in dieser Oktavaufteilung approximieren können und wie gut.

6.3 Der Quintenzirkel und die Quintenspirale

Nach Satz 36 ist es nicht möglich, eine endliche Oktavaufteilung anzugeben, die unter einem rationalen Tonintervall abgeschlossen ist. Insbesondere kann es keine solche Aufteilung X geben, die für jeden Ton $x \in X$ auch die Quinte $o(3/2 \cdot x)$ enthält. Wie erwähnt, kann eine gleichstufige Oktavaufteilung die Quinte approximieren, aber nicht exakt enthalten.

Die Pythagoräer wählten einen vollständig anderen Ansatz: anstatt (die unmögliche) Abgeschlossenheit unter Quinten zu fordern, approximierten sie diese Abgeschlossenheit durch Hinzufügung hinreichend vieler Quinten. Schreiten wir in Quinten nach oben, multiplizieren wir die Zahl jeweils mit $3/2$ und teilen ggf. zusätzlich durch 2, um im Oktavbereich zu verbleiben. Wir erhalten die folgende Folge von Tönen.¹¹

	$(3/2)^k$	$o((3/2)^k)$	Tonbezeichnung
Grundton	1	1	C
Erste Quinte nach oben	$3/2$	$3/2$	G
Zweite Quinte nach oben	$3^2/2^2$	$3^2/2^3 = 9/8$	D
Dritte Quinte nach oben	$3^3/2^3$	$3^3/2^4 = 27/16$	A
Vierte Quinte nach oben	$3^4/2^4$	$3^4/2^6 = 81/64$	E
Fünfte Quinte nach oben	$3^5/2^5$	$3^5/2^7 = 243/128$	B
Sechste Quinte nach oben	$3^6/2^6$	$3^6/2^9 = 729/512$	F $\sharp$

Eine vergleichbare Folge erhalten wir, falls wir in Quinten nach unten schreiten, also die Zahl jeweils mit $2/3$ multiplizieren und ggf. mit 2, um im Oktavbereich zu verbleiben.

¹¹Wir verwenden *Tonbezeichnungen*, die wir in Abschnitt 6.4 genauer einführen werden.

	$(3/2)^k$	$o((3/2)^k)$	Tonbezeichnung
Grundton	1	1	C
Erste Quinte nach unten	$2/3$	$2^2/3^1 = 4/3$	F
Zweite Quinte nach unten	$2^2/3^2$	$2^4/3^2 = 16/9$	B $\flat$
Dritte Quinte nach unten	$2^3/3^3$	$2^5/3^3 = 32/27$	E $\flat$
Vierte Quinte nach unten	$2^4/3^4$	$2^7/3^4 = 128/81$	A $\flat$
Fünfte Quinte nach unten	$2^5/3^5$	$2^8/3^5 = 256/243$	D $\flat$
Sechste Quinte nach unten	$2^6/3^6$	$2^{10}/3^6 = 1024/729$	G $\flat$

Enharmonie. Vergleichen wir nun die jeweils letzten Töne in diesen Tabellen, also $3^6/2^9 = 729/512$ und $2^{10}/3^6 = 1024/729$, so stellen wir fest, daß $729/512 \approx 1,423828$ und $1024/729 \approx 1,4046639$. Das Tonintervall zwischen diesen beiden Tönen ist

$$\frac{729/512}{1024/729} = \frac{3^6/2^9}{2^{10}/3^6} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,013641.$$

Zum Vergleich: ein üblicher Halbton in einer üblichen Klavierstimmung entspricht etwa dem Tonintervall 1,06. Der Abstand zwischen den in der Tabelle als F $\sharp$ („fis“) und G $\flat$ („ges“) bezeichneten Tönen ist also deutlich kleiner als ein üblicher Halbton. Mit einem Taschenrechner können wir leicht errechnen:

$$(3^{12}/2^{19})^4 \approx 1,05569 \text{ und } (3^{12}/2^{19})^5 \approx 1,070091;$$

das kleine Tonintervall zwischen F $\sharp$ und G $\flat$ ist also etwa ein Viertel eines Halbtonschritts. Wir bezeichnen das Tonintervall $p := 3^{12}/2^{19}$ als das *pythagoräische Komma*.

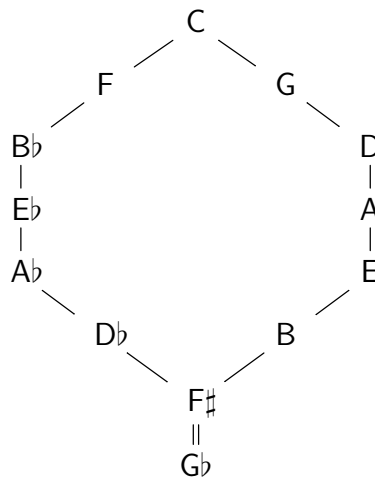
Man kann dieses Tonintervall als klein genug erachten, um die beiden Töne F $\sharp$ und G $\flat$ miteinander zu identifizieren. Diese Identifikation bezeichnen wir als *Enharmonie* und sagen, daß F $\sharp$ und G $\flat$ *enharmonisch* zueinander sind: sie sind nicht identisch, sondern weichen exakt um ein pythagoräisches Komma voneinander ab; genauer: F $\sharp$ ist ein pythagoräisches Komma höher als G $\flat$.

Die Relation „ x und y weichen um ein pythagoräisches Komma voneinander ab“, also $x = p \cdot y$ oder $y = p \cdot x$ ist allerdings keine Äquivalenzrelation, da sie nicht transitiv ist: sowohl x und px als auch px und p^2x weichen je um ein pythagoräisches Komma voneinander ab, aber x und p^2x weichen um zwei pythagoräische Kommas voneinander ab. Um eine Äquivalenzrelation zu erhalten, müssen wir den transitiven Abschluss betrachten:

$$x \equiv_p y : \Longleftrightarrow \text{es gibt ein } n \geq 0, \text{ so daß } o(p^n \cdot x) = y \text{ oder } o(p^n \cdot y) = x.$$

Aufgabe 32. Zeigen Sie, daß $\equiv_p$ eine Äquivalenzrelation ist und daß für die in den Tabellen definierten Töne C, G, D, A, E, B, F $\sharp$, F, B $\flat$, E $\flat$, A $\flat$, D $\flat$ und G $\flat$ gilt, daß F $\sharp \equiv_p$ G $\flat$ und daß alle anderen paarweise nicht-äquivalent bzgl. $\equiv_p$ sind.

Der Quintenzirkel, Ganz- & Halbtonschritte. Modulo der Äquivalenzrelation $\equiv_p$ der Enharmonie erhalten wir also einen geschlossenen Kreis von Tonintervallen, den wir als den *Quintenzirkel* bezeichnen.



Sortieren wir die im Quintenzirkel auftretenden zwölf Zahlen nach Größe, so erhalten wir eine Oktavaufteilung in zwölf Töne. Wir vergleichen diese mit den entsprechenden Zahlenwerte für eine gleichstufige Oktavaufteilung in 12 Töne und stellen fest, daß die gleichstufige Oktavaufteilung in 12 Töne eine bemerkenswert gute Approximation der pythagoräischen Töne ist.

C	D $\flat$	D	E $\flat$	E	F	F $\sharp$	G	A $\flat$	A	B $\flat$	B
1	$256/243$	$9/8$	$32/27$	$81/64$	$4/3$	$729/512$	$3/2$	$128/81$	$27/16$	$16/9$	$243/128$
1,000	1,053	1,125	1,185	1,266	1,333	1,424	1,500	1,580	1,688	1,778	1,898
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$\sqrt[2]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[3]{2})^2$	$(\sqrt[4]{2})^3$	$(\sqrt[6]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$
1,000	1,059	1,122	1,189	1,260	1,335	1,414	1,498	1,587	1,682	1,782	1,888

Betrachtet man im Quintenzirkel die Tonintervalle zwischen den als C, D, E, F, G, A und B bezeichneten Tönen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 C : D &= 9/8 \cdot 1 = 9/8, \\
 D : E &= 81/64 \cdot 8/9 = 9/8, \\
 E : F &= 4/3 \cdot 64/81 = 256/243, \\
 F : G &= 3/2 \cdot 3/4 = 9/8, \\
 G : A &= 27/16 \cdot 2/3 = 9/8, \\
 A : B &= 243/128 \cdot 16/27 = 9/8 \text{ und} \\
 B : C &= 2 \cdot 128/243 = 256/243.
 \end{aligned}$$

Das (harmonische) Tonintervall $g := 9/8$ bezeichnet man als den *pythagoräischen Ganztonschritt* und das Tonintervall $h := 256/243$ als den *pythagoräischen Halbtonschritt*. Es fällt auf, daß trotz des Namens der Ganztonschritt nicht aus zwei Halbtonschritten besteht, da

$$h^2 = 256/243 \cdot 256/243 = 2^8/3^5 \cdot 2^8/3^5 = 2^{16}/3^{10} \neq 3^2/2^3 = g;$$

der Abstand zwischen dem durch zwei Halbtonschritte erzeugten Tonintervall und einem Ganztonschritt ist $gh^{-2} = 3^2/2^3 \cdot 3^{10}/2^{16} = 3^{12}/2^{19} = p$, also ein pythagoräisches Komma. Man beachte, daß in der pythagoräischen Stimmung auch die Schritte von den Tönen C, D, F,

G und A zu den jeweils über ihnen liegenden Halbtönen ein pythagoräischer Halbtonschritt sind.

$$\begin{aligned} C : D\flat & \quad 256/243 \cdot 1 = 256/243, \\ D : E\flat & \quad 32/27 \cdot 8/9 = 256/243, \\ F : G\flat & \quad 1024/729 \cdot 3/4 = 256/243, \\ G : A\flat & \quad 128/81 \cdot 2/3 = 256/243 \text{ und} \\ A : B\flat & \quad 16/9 \cdot 16/27 = 256/243. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß der Abstand zwischen dem Halbton und dem jeweiligen über ihm liegenden Ganzton ein pythagoräischer Halbtonschritt plus ein pythagoräisches Komma ist (da sich ja die beiden Tonintervalle zu einem pythagoräischen Ganztonschritt ergänzen müssen). In der obigen Liste haben wir $G\flat$ statt $F\sharp$ verwendet; da $F\sharp$ ein pythagoräisches Komma oberhalb von $G\flat$ liegt, ist also der Abstand $F : F\sharp$ ein pythagoräischer Halbtonschritt plus ein pythagoräisches Komma ($3^6/2^9 \cdot 3/2^2 = 3^7/2^{11} = 2^8/3^5 \cdot 3^{12}/2^{19}$) und der Abstand $F\sharp : G$ gerade ein pythagoräischer Halbtonschritt ($3/2 \cdot 5^{12}/729 = 256/243$).

Aufgabe 33. In der pythagoräischen Stimmung betrachten Sie den Ton, den Sie erhalten, wenn Sie zwölf pythagoräische Halbtonschritte von C nach oben gehen. Wieviele pythagoräische Kommas ist das Intervall zwischen diesem Ton und dem oktavierten C = 2?

Die Quintenspirale. Der Quintenzirkel ist allerdings nur modulo der Äquivalenzrelation $\equiv_p$ ein geschlossener Kreis: ohne die enharmonische Identifikation vermittelt $\equiv_p$ entsteht eine *Quintenspirale*, die sich nach Satz 36 niemals schließt (vgl. Abbildung 9).

Setzen wir z.B. die aufschreitenden Quinten nach $F\sharp$ fort, so erhalten wir $3^7/2^{11}$ ($C\sharp$, „cis“), $3^8/2^{12}$ ($G\sharp$, „gis“), $3^9/2^{14}$ ($D\sharp$, „dis“), $3^{10}/2^{15}$ ($A\sharp$, „ais“), $3^{11}/2^{17}$ ($E\sharp$, „eis“) und $3^{12}/2^{19}$ ($B\sharp$, „his“) und stellen fest, daß die zwölfte Quinte $B\sharp$ exakt das pythagoräische Komma ist. Der so erhaltene Ton ist also enharmonisch zum Grundton C, also $C \equiv_p B\sharp$; genauer: $B\sharp$ ist exakt ein pythagoräisches Komma höher als C. Mit anderen Worten: das pythagoräische Komma entspricht dem Tonintervall, welches entsteht, wenn man zwölf Quinten nach oben schreitet und dabei sieben Oktaven nach unten transponiert, um im Oktavbereich zu verbleiben.

Genauso können wir die abschreitenden Quinten nach $G\flat$ fortsetzen und erhalten $2^{12}/3^7$ ($C\flat$, „ces“), $2^{12}/3^8$ ($F\flat$, „fes“), $2^{13}/3^9$ ($B\flat\flat$, „bes“), $2^{15}/3^{10}$ ($E\flat\flat$, „eses“), $2^{16}/3^{11}$ ($A\flat\flat$, „asas“), $2^{18}/3^{12}$ ($D\flat\flat$, „deses“). Dieser letzte Ton ist exakt ein pythagoräisches Komma niedriger als der Grundton C, also $C \equiv_p D\flat\flat$. Somit gilt: falls wir nun $B\sharp$ und $D\flat\flat$ vergleichen, so ist $B\sharp$ zwei pythagoräische Kommas höher als $D\flat\flat$ und daher $B\sharp \equiv_p D\flat\flat$.

Aufgabe 34. Berechnen Sie das Tonintervall zwischen C und $B\flat\flat\flat$.

Beachten Sie, dass das pythagoräische Komma p ein sehr kleines Tonintervall ist, aber für hinreichend grosses n gilt dies nicht für p^n ; z.B. ist $p^9 > 9/8$. Das bedeutet, daß $B\sharp\sharp\sharp\sharp\sharp$ und $D\flat\flat\flat\flat\flat$ enharmonische Töne sind, die um mehr als eine Sekunde voneinander abweichen.

Aufgabe 35. Finden Sie n , so daß $p^n > 3/2$ und somit enharmonische Töne, die um mehr als eine Quinte voneinander abweichen.

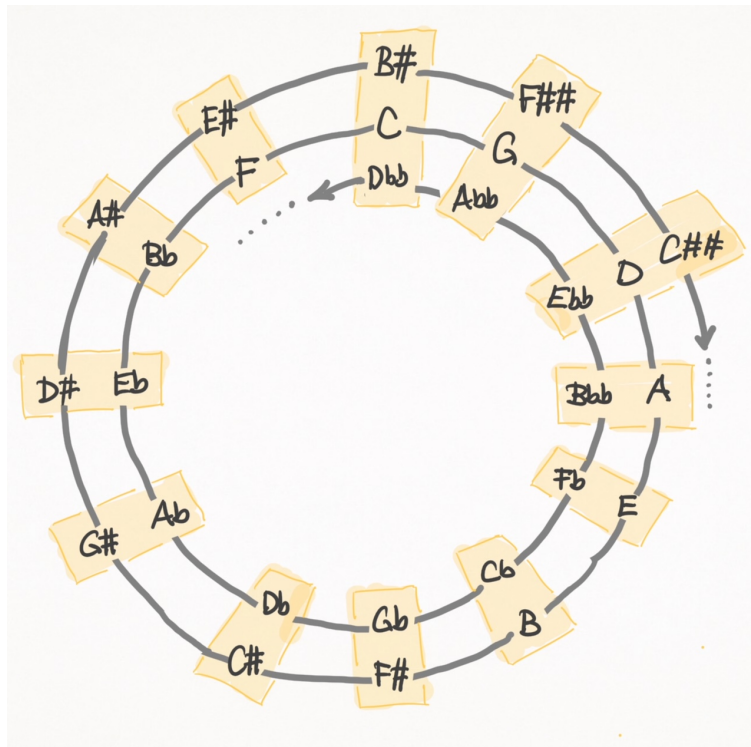


Abbildung 9: Die Quintenspirale

Jeder in der Quintenspirale auftauchende Ton ist enharmonisch zu einem der im Quintenzirkel auftretenden zwölf Töne. Der pythagoräische Ansatz der enharmonischen Identifikation führt also natürlicherweise zu einer Zwölftteilung der Oktave.

Besonderer Status der Quinten und Quarten im Quintenzirkel. Der Quintenzirkel gibt den Quinten und Quarten eine besondere Rolle, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 38. Der Quintenzirkel ist bis auf Enharmonie unter Quinten und Quarten abgeschlossen.

Beweis. Die Aussage bedeutet, daß für jede im Quintenzirkel auftauchende Zahl x auch die Zahlen $o(3/2 \cdot x)$, $o(2/3 \cdot x)$, $o(4/3 \cdot x)$ und $o(3/4 \cdot x)$ bis auf Enharmonie ebenfalls im Quintenzirkel auftauchen. Weil $4/3 = 2 \cdot 2/3$ und weil $3/4 = 1/2 \cdot 3/2$, reicht es, dies für $o(3/2 \cdot x)$ und $o(2/3 \cdot x)$ zu zeigen.

Nach Definition haben alle Töne bis auf $F\sharp$ den um eine Quinte erhöhten Ton im Zirkel. Der um eine Quinte erhöhte Ton $F\sharp$ ist aber $C\sharp$, welcher enharmonisch zu $D\flat$ ist. Ebenso haben nach Definition alle Töne bis auf $D\flat$ den um eine Quinte erniedrigten Ton im Zirkel, aber dieser ist $G\flat$, welcher enharmonisch zu $F\sharp$ ist. Q.E.D.

Diese besondere Rolle von Quinten und Quarten bedeutet allerdings, daß die anderen Tonintervalle mit kleinen ganzzahligen Koeffizienten (wie große und kleine Terzen) nicht im Quintenzirkel vertreten sind. Die Tatsache, daß die Zahl 5 nicht in der τετραχτύς auftaucht und die Pythagoräer lediglich mit den Tonintervallen 2:1, 3:2 und 4:3 arbeiteten, hat also weitreichende Konsequenzen.

Satz 39. Es gibt keinen Ton im Quintenzirkel, der enharmonisch mit einer großen oder kleinen Terz (also $5/4$ oder $6/5$) ist.

Beweis. Das pythagoräische Komma ist $3^{12}/2^{19}$ und alle Zahlen im Quintenzirkel haben lediglich die Primzahlen 2 und 3 in ihrer Primfaktorzerlegung. Also ist jede Zahl, die enharmonisch mit einer Zahl im Quintenzirkel ist, von der Form $p = 2^z \cdot 3^{z'}$ für geeignete $z, z' \in \mathbb{Z}$. Daher können $5/4$ und $6/5$ nicht von dieser Form sein, da sie einen nichttrivialen Faktor 5 enthalten.
Q.E.D.

Wir bemerken, daß die Aussage in Satz 39 ebenso für viele andere kleine ganzzahlige Verhältnisse gilt, wie z.B. $7/6$ oder $8/7$, aber nicht $9/8 = 3^2/2^2$ (Tonbezeichnung D).

6.4 Tonbezeichnungen und formale Tonleitern

Im folgenden führen wir formal die Tonbezeichnungen ein, die wir in unserer Analyse des Quintenzirkels in Abschnitt 6.3 bereits verwendet haben.

Definition 40. Wir definieren sieben *Grundbezeichnungen* und verwenden das Symbol X als Variable für Grundbezeichnungen. Jeder der sieben Grundbezeichnungen X weisen wir sowohl eine *Grundposition* $gp(X)$ als auch eine *Feinposition* $fp(X)$ zu und ordnen sie zyklisch an:

X	C	$<$	D	$<$	E	$<$	F	$<$	G	$<$	A	$<$	B	$<$	C
$gp(X)$	0		1		2		3		4		5		6		
$fp(X)$	0		2		4		5		7		9		11		

Für zwei Grundbezeichnungen X und Y definieren wir den *Grundabstand* und den *Feinabstand* durch

$$\begin{aligned} d_g(X, Y) &:= gp(Y) - gp(X) \pmod{7} \\ d_f(X, Y) &:= fp(Y) - fp(X) \pmod{12} \end{aligned}$$

Man beachte, dass diese Abstandsfunktionen nicht symmetrisch sind, aber symmetrisch modulo 7 oder 12:

$$d_g(C, E) = 2 - 0 \pmod{7} = 2 \neq 5 = d_g(E, C) = 0 - 2 \pmod{7}.$$

Der Grundabstand misst die relative Position in der Folge der Grundbezeichnungen: $d_g(X, Y)$ gibt an, wieviele Schritte man von X in der Liste der Grundbezeichnungen (zyklisch) nach oben gehen muß, um Y zu erreichen. Der Feinabstand misst zusätzlich die Zahl der Halbtonschritte, gibt also einen kleineren Abstand für die Schritte von E zu F und B zu C als für die anderen fünf Schritte.

Definition 41. Eine *Tonbezeichnung* ist eine endliche Folge von Symbolen, welche entweder eine Grundbezeichnung ist oder aus einer Grundbezeichnung mit einer endlichen Folge von $\sharp$ -Symbolen oder aus einer Grundbezeichnung mit einer endlichen Folge von b -Symbolen besteht.

Wir beachten, daß es unendlich viele Tonbezeichnungen gibt. Das bedeutet nicht notwendigerweise, daß wir mit unendlich vielen Tönen arbeiten müssen, da wir verschiedenen Tonbezeichnungen den gleichen Ton zuordnen können. Dies geschieht z.B. bei Enharmonie: identifizieren wir $F\sharp$ und $G\flat$, so ordnen wir diesen Tonbezeichnungen den gleichen Wert zu.

Wir definieren die Grundabstandsfunktion d_g auf allen Tonbezeichnungen, indem wir die $\sharp$ - und $\flat$ -Symbole ignorieren: falls X' eine Tonbezeichnung mit Grundbezeichnung X und Y' eine Tonbezeichnung mit Grundtonbezeichnung Y ist, so setzen wir

$$d_g(X', Y') := d_g(X, Y).$$

Z.B. $d_g(D\sharp\sharp, G\flat) = d_g(D, G) = 2$.

Wir setzen nun die Feinabstandsfunktion d_f durch Rekursion nach der Länge der Folge von zusätzlichen Symbolen auf alle Tonbezeichnungen fort: sind X und Y Tonbezeichnungen, so daß $d_f(X, Y)$ bereits definiert ist, so ist

$$\begin{aligned} d_f(X\flat, Y) &= d_f(X, Y\sharp) := d_f(X, Y) + 1, \\ d_f(X\sharp, Y) &= d_f(X, Y\flat) := d_f(X, Y) - 1, \\ d_f(X\sharp, Y\sharp) &= d_f(X\flat, Y\flat) := d_f(X, Y), \\ d_f(X\sharp, Y\flat) &:= d_f(X, Y) - 2 \text{ und} \\ d_f(X\flat, Y\sharp) &:= d_f(X, Y) + 2. \end{aligned}$$

Z.B. $d_f(D\sharp\sharp, G\flat) = d_f(D, G) - 2 - 1 = d_f(D, G) - 3 = 5 - 3 = 2$. Wir berechnen als weitere Beispiele:

$$\begin{array}{ll} d_g(C, F) = 3 & d_f(C, F) = 5, \\ d_g(C, F\sharp) = 3 & d_f(C, F\sharp) = 6, \\ d_g(C, G\flat) = 4 & d_f(C, G\flat) = 6 \text{ und} \\ d_g(C, G) = 4 & d_f(C, G) = 7. \end{array}$$

Aufgabe 36. Für die folgenden Werte von X , bestimmen Sie Y , so daß $d_g(X, Y) = 4$ und $d_f(X, Y) = 7$: $X = G\sharp, A\sharp, B\sharp$.

Satz 42. Für jede Tonbezeichnung X , jedes $k \in \{0, \dots, 6\}$ und jede natürliche Zahl n gibt es eine eindeutig bestimmte Tonbezeichnung Z , so daß $d_g(X, Z) = n$ und $d_f(X, Z) = m$.

Beweis. Sei Y die Grundbezeichnung von X , dann gibt es nach Definition eine eindeutig bestimmte Grundbezeichnung Y^* , so daß $d_g(Y, Y^*) = k$. Setze $m := d_f(X, Y^*)$. Falls $n = m$, so setzen wir $Z := Y^*$; falls $m < n$, so setzen wir $Z := Y^*\sharp \dots \sharp$ mit einer Folge von $n - m$ vielen $\sharp$ -Symbolen; falls $m > n$, so setzen wir $Z := Y^*\flat \dots \flat$ mit einer Folge von $n - m$ vielen $\flat$ -Symbolen. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß jede Tonbezeichnung von einem dieser drei Typen ist und somit die Zahl der $\sharp$ - oder $\flat$ -Symbole durch den Feinabstand eindeutig bestimmt ist. Q.E.D.

Tonleitern. Unter Verwendung der Grund- und Feinabstandsfunktionen können wir nun die Tonleitern definieren: ist X eine Tonbezeichnung, so bildet die Folge $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$ aus sieben Tonbezeichnungen die *formale X-Dur-Tonleiter*, falls $X_1 = X$ und

$$\begin{array}{ll} d_g(X_1, X_2) = 1 & d_f(X_1, X_2) = 2, \\ d_g(X_1, X_3) = 2 & d_f(X_1, X_3) = 4, \\ d_g(X_1, X_4) = 3 & d_f(X_1, X_4) = 5, \\ d_g(X_1, X_5) = 4 & d_f(X_1, X_5) = 7, \\ d_g(X_1, X_6) = 5 & d_f(X_1, X_6) = 9 \text{ und} \\ d_g(X_1, X_7) = 6 & d_f(X_1, X_7) = 11. \end{array}$$

Wegen Satz 42 ist diese formale Tonleiter eindeutig bestimmt. Z.B. ist die formale G-Dur-Tonleiter gerade $(G, A, B, C, D, E, F\sharp)$.

Aufgabe 37. Bestimmen Sie die formale Bb-Dur-Tonleiter.

Wir verwenden auch die folgenden Bezeichnungen:

X_1	Grundton, <i>Tonika</i> oder <i>formale Prime</i> von X
X_2	<i>formale Sekunde</i> von X
X_3	<i>formale große Terz</i> von X
X_4	<i>Subdominante</i> oder <i>formale Quarte</i> von X
X_5	<i>Dominante</i> oder <i>formale Quinte</i> von X
X_6	<i>formale Sexte</i> von X
X_7	<i>formale Septime</i> von X

Die Dominante der Dominante von X nennt man auch die *Doppeldominante* von X . Z.B. die Tonika von D ist D, die Subdominante von D ist G (da $d_g(D, G) = 5 - 2 = 3$ und $d_f(D, G) = 7 - 2 = 5$) und die Dominante von D ist A (da $d_g(D, A) = 6 - 2 = 4$ und $d_f(D, G) = 9 - 2 = 7$); die Doppeldominante ist dann E. Ebenso: die Tonika von Fb ist Fb, die Subdominante von Fb ist Bbb (da $d_g(Fb, Bbb) = d_g(F, B) = 6 - 3 = 3$ und $d_f(Fb, Bbb) = (11 - 5) - 1 = 5$), die Dominante von Fb ist Cb (da $d_g(Fb, Cb) = d_g(F, C) = 0 - 3 = 4 \pmod{7}$ und $d_f(Fb, Cb) = 0 - 5 \pmod{12} = 7$) und die Doppeldominante von Fb ist Gb.

Aufgabe 38. Bestimmen Sie Tonika, Subdominante, Dominante und Doppeldominante von Fb.

Ebenso können wir die *formale X-Moll-Tonleiter* als die Folge $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$ mit $X_1 = X$ und

$$\begin{array}{ll} d_g(X_1, X_2) = 1 & d_f(X_1, X_2) = 2, \\ d_g(X_1, X_3) = 2 & d_f(X_1, X_3) = 3, \\ d_g(X_1, X_4) = 3 & d_f(X_1, X_4) = 5, \\ d_g(X_1, X_5) = 4 & d_f(X_1, X_5) = 7, \\ d_g(X_1, X_6) = 5 & d_f(X_1, X_6) = 9 \text{ und} \\ d_g(X_1, X_7) = 6 & d_f(X_1, X_7) = 10. \end{array}$$

Wir nennen das in der X-Moll-Tonleiter auftauchende X_3 als *formale kleine Terz* von X .

Aufgabe 39. Bestimmen Sie die formale B $\flat$ -Moll-Tonleiter.

Zur Aussprache der Tonbezeichnungen. Mit einer Ausnahme werden die Tonbezeichnungen einfach wie die entsprechenden Buchstaben ausgesprochen, also „c“, „d“, „e“, „f“, „g“ und „a“. Allerdings wird im Deutschen der Ton mit der Tonbezeichnung B üblicherweise als „h“ und nicht als „b“ bezeichnet; die Bezeichnung „b“ wird im Deutschen stattdessen für den mit der Bezeichnung B $\flat$ versehenen Ton verwendet; unsere Tonbezeichnungen folgen der angelsächsischen Notation. Die Erhöhung eines Tons durch $\sharp$ wird durch die Endung „-is“, die Erniedrigung durch „-es“ angezeigt: d.h., daß C $\sharp$, D $\sharp$, E $\sharp$, F $\sharp$, G $\sharp$, A $\sharp$ und B $\sharp$ als „cis“, „dis“, „eis“, „fis“, „gis“, „ais“ und „his“ und C $\flat$, D $\flat$, E $\flat$, F $\flat$, G $\flat$, A $\flat$ und B $\flat$ als „ces“, „des“, „es“, „fes“, „ges“, „as“ und „b“ ausgesprochen werden. Doppelte Erhöhung oder Erniedrigung erhält dann die Endung „-isis“ oder „-eses“.¹²

6.5 Stimmungen

Die in Abschnitt 6.4 eingeführten Begriffe sind rein formel und haben zunächst noch nichts mit der Zuweisung von Frequenzen zu diesen Symbolen zu tun. Eine *Stimmung* T ist eine Funktion, welche jeder Tonbezeichnung X einen Zahlwert $T(X) \in [1, 2)$ zuweist mit $T(C) = 1$. Formal stellen wir keine weiteren Anforderungen an eine Stimmung, auch wenn einige Anforderungen natürlich sind (z.B. ist es i.a. sinnvoll anzunehmen, dass falls X und Y Grundbezeichnungen mit $X < Y$ sind, so gilt $T(X) < T(Y)$).

Begriffe wie „Sekunde“, „kleine Terz“, „große Terz“, „Quarte“ und „Quinte“ haben nun zwei verschiedene Definitionen: eine Definition als Frequenzenverhältnis (also $9/8$, $6/5$, $5/4$, $4/3$ und $3/2$) und eine Definition als formales Symbol (also D, E $\flat$, E, F und G zum Grundton C). Im allgemeinen kann man nicht erwarten, daß diese zwei Begriffe übereinstimmen. Wir nennen eine Stimmung *rein* für ein solches Tonintervall $X : Y$, wenn $X : Y$ das formale Intervall ist wenn der numerische Wert von $\frac{T(Y)}{T(X)}$ genau der gewünschte Zahlenwert ist. Also ist die Quinte $C : G$ in einer Stimmung T rein, falls $\frac{T(G)}{T(C)} = 3/2$.

Die Definitionen aus Abschnitt 6.4 erlauben es uns nun, die pythagoräische Stimmung mathematisch exakt zu definieren:

- (i) Die Tonbezeichnung C erhält den Wert 1.
- (ii) Ist X eine Tonbezeichnung, in der keine $\flat$ -Symbole auftauchen und $T(X)$ ist bereits definiert. Sei Y die Dominante von X . Dann definiere $T(Y) := o^{(3/2)} \cdot x$.
- (iii) Ist X eine Tonbezeichnung, in der keine $\sharp$ -Symbole auftauchen und $T(X)$ ist bereits definiert. Sei Y die Dominante von X . Dann definiere $T(Y) := o^{(2/3)} \cdot x$.

Diese rekursive Definition weist nach Satz 42 allen Tonbezeichnungen einen eindeutigen Wert zu und stimmt mit den Zahlenwerten (und Tonbezeichnungen) aus der Quintenspirale überein. Nach Definition sind alle Quinten in dieser Stimmung rein; Satz 39 besagt, daß keine der Terzen rein in dieser Stimmung sind.

¹²Man beachte „es“ statt „ees“, „as“ statt „aes“ und „b“ statt „hes“. Ebenso haben wir bei den doppelten Erniedrigungen „eses“ statt „eeses“, „asas“ statt „aesas“ und „bes“ statt „heses“.

Ebenso können wir die *gleichstufige Stimmung* definieren:

$$T(X) := (\sqrt[12]{2})^k : \iff d_f(C, X) = k.$$

Nach Lemma 37 ist $T(C) = 1$ der einzige rationale Wert der so definierten Funktion T , also ist kein einziges Intervall rein für diese Stimmung.

6.6 Cents

Wir haben betont, dass das Verhältnis von Tonintervallen multiplikativ ist. Dies bedeutet, daß ein Vergleich der Größe von Tonintervallen numerisch oft nicht ganz einfach ist. Z.B. sind die Tonintervalle $C : D\flat$ und $B : C$ beide ein pythagoräischer Halbtonschritt, also $2^{56}/243$; die zugeordneten Zahlen, die den Frequenzen entsprechen sind 1,053 ($D\flat$) und 1,898 (B). Es ist nicht ganz einfach (ohne die Quotienten explizit auszurechnen) zu sehen, dass $\frac{1,053}{1} = \frac{2}{1,898}$. Ein Wertesystem, in welchem die Abstände nicht multiplikativ, sondern additiv dargestellt werden, erleichtert dies.

Dies können wir erreichen, indem wir die Logarithmusfunktion verwenden, um die multiplikative Struktur in eine additive zu verwandeln: die folgende Notation wurde von Alexander John Ellis (1814–1890) eingeführt. Wir definieren:

$$\text{cent}(x) := 1200 \cdot \log_2(x).$$

Der Grundton erhält den Wert $0 = 1200 \cdot \log_2(1)$ Cent, die Oktave erhält den Wert $1.200 = 1200 \cdot \log_2(2)$ Cent und der Oktavbereich wird in zwölf Teile von je 100 cent aufgeteilt. Jedes Cent entspricht dem Verhältnis $\sqrt[1200]{2}$, so $\text{cent}(\sqrt[1200]{2}) = 1200 \cdot \log_2(\sqrt[1200]{2}) = 1200 \cdot 1/1200 = 1$. Die Quinte ($3/2$) erhält den Wert $\text{cent}(3/2) = 1200 \cdot \log_2(3/2) \approx 701,96$. In der gleichstufigen Stimmung beträgt jeder Halbtonschritt 100 Cent und jeder Ganztonschritt 200 Cent. Der Vergleich der pythagoräischen Tonleiter mit der gleichstufigen Tonleiter in Cent zeigt die Größe der Abweichungen.

	C	D	E	F	G	A	B
Pythagoräisch	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	16/9
Cents	0	203,910	407,820	498,045	701,955	905,865	1109,775
Gleichstufig	1	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^4$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$
Cents	0	200	400	500	700	900	1.100

In Cents ausgedrückt, erhalten wir die folgenden Werte:

pythagoräischer Ganztonschritt	$1200 \cdot \log_2(g) = 1200 \cdot \log_2(9/8) \approx 203,91,$
pythagoräischer Halbtonschritt	$1200 \cdot \log_2(h) = 1200 \cdot \log_2(2^{56}/243) \approx 90,22$ und
pythagoräisches Komma	$1200 \cdot \log_2(p) = 1200 \cdot \log_2(3^{12}/2^{19}) \approx 23,47.$

Man beachte, daß $90,22 \cdot 2 + 23,47 = 203,91$, was direkt der Gleichung $p = gh^{-2}$ entspricht.

Aufgabe 40. Berechnen Sie die Cent-Werte für die Intervalle zwischen dem sechsten und fünften Oberton (also $\frac{7}{6}$) und dem siebten und sechsten Oberton (also $\frac{8}{7}$).

Aufgabe 41. Berechnen Sie den Cent-Wert des Tons E $\flat\flat$ in pythagoräischer Stimmung und vergleichen Sie ihn mit dem Cent-Wert des Tons D.

7 Stimmungen

7.1 Terzen

Die harmonischen Überlegungen aus Kapitel 6 sind hauptsächlich durch Physik, Mathematik und praktische Überlegungen determiniert und unabhängig von der menschlichen Kultur: die Physik der Wellengleichung bestimmt, daß Klänge als periodische Funktionen auf unser Ohr treffen; die Mathematik der Fourieranalysis bestimmt, daß diese Klänge daher als Linearkombinationen von Sinusschwingungen einer Grundfrequenz auftreten; somit ist die besondere Rolle der Intervalle mit kleinen ganzzahligen Koeffizienten physikalisch und mathematisch bestimmt. Die praktischen Gegebenheiten von Instrumenten mit fest vorgegebenen Klängen erzwingen eine feste endliche Oktavaufteilung. Es ist durch die Physik und Mathematik vorgegeben, daß es ein Ziel ist, möglichst viele der Intervalle mit kleinen ganzzahligen Koeffizienten in der vorgegebenen Oktavaufteilung unterzubringen.

Die pythagoräische Entscheidung, die Oktave in zwölf Töne aufzuteilen, ist ebenfalls nicht rein kulturell, weil sie durch mathematische Vorgaben natürlich ist: die Quinte ist nach der Oktave das natürlichste Intervall und dass sich der Quintenzirkel nach zwölf Schritten bis auf Enharmonie schließt, ist eine arithmetische Tatsache. Statt eines Quintenzirkels hätte man auch einen Quartenzirkel definieren können (also in Quarten nach oben und unten schreiten), aber wie im Beweis von Satz 38 gesehen, erzeugt der Quartenzirkel exakt die gleichen Töne.

In diesem Abschnitt wollen wir Terzen diskutieren und wir verlassen damit die kulturunabhängige Diskussion der Harmonie.

Wie in Satz 39 gezeigt wurde, bevorzugt der Quintenzirkel die Quinten und Quarten gegenüber den Terzen. Ein Terzanalogen des Quintenzirkels führt zu keinem befriedigendem Ergebnis, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 42. In Analogie zum Quintenzirkel können wir die *Groß- und Kleinterzenzirkel* oder *Groß- und Kleinterzenspiralen* definieren, bei der jeweils von einem Ton eine große Terz ($5/4$) bzw. eine kleine Terz ($6/5$) nach oben und unten fortgeschritten wird. Wie würde man *Enharmonie* für diese Zirkel definieren? Wieviele Töne hat die entsprechende Oktavaufteilung? Was wäre der numerische Wert des *Großterzenkommas*; was wäre der Wert des *Kleinterzenkommas*? Zeigen Sie, daß es in der Großterzenspirale keine zwei Töne gibt, deren Intervall eine reine Quinte (also $\frac{3}{2}$) ist.

In der westlichen klassischen Musik spielen allerdings die von den Terzen dominierten Dreiklänge eine wichtige Rolle, z.B. der C-Dur Dreiklang $C : E : G$, bei dem wir erwarten würden, daß das Tonintervall $C : E$ eine große Terz bildet und das Tonintervall $E : G$ eine kleine Terz. In der pythagoräischen Tonleiter sind diese Intervalle jedoch $81/64$ und $3/2 \cdot 64/81 = 32/27$. Vergleichen wir diese mit der großen Terz ($5/4$) und kleinen Terz ($6/5$), so erhalten wir

$$\begin{aligned} 81/64 &= 81/80 \cdot 5/4 \text{ und} \\ 6/5 &= 81/80 \cdot 32/27, \end{aligned}$$

d.h. der Ton E ist in der pythagoräischen Tonleiter um das Intervall $81/80 = 1,0125 = 21,5$ Cent zu hoch, um einen herkömmlichen mit Terzen gebildeten Dreiklang zu formen. Dieses

Intervall hat fast, aber nicht exakt die gleiche Größe wie das pythagoräische Komma ($3^{12}/2^{19} \approx 1,0136 \approx 23,47$ Cent) und wird als *syntonisches Komma* bezeichnet. Wir verwenden die Bezeichnung $s := 81/80$ für das syntonische Komma; die Differenz ps^{-1} wird auch als *Schisma* bezeichnet (etwa 2 Cent).

Die aufkommende polyphone Musik des späten Mittelalters und der Renaissance, insbesondere in der *Ars nova* (14. Jahrhundert) und der *Ars subtilior* (ca. 1377 bis 1420), gibt den Terzen eine zunehmend wichtige Rolle. Walter Odington (13. & 14. Jhdt.) erwähnt die große Terz, also $5/4$ erstmals als harmonisches Intervall. Die wichtige Rolle der Terzen in der westlichen klassischen Musik sorgt dafür, daß wir mit der pythagoräischen Tonleiter nicht zufrieden sein können und sie modifizieren müssen, um das Auftreten von Terzen und reine Dreiklänge zu ermöglichen.

Seit dem 15. Jhdt. verwendete man in europäischer Musik *reine Stimmungen* und seit Gioseffo Zarlino (1517–1590) *mitteltönige Stimmungen*, die wir in den Abschnitten 7.3 & 7.5 kennenlernen werden. Diese hatten allerdings beide die Eigenschaft, daß man wegen der sogenannten *Wolfsquinte* (vgl. S. 68) nicht in allen Tonarten spielen konnte. Alternativen waren die sogenannten *wohltemperierten Stimmungen*, die wir in Abschnitt 7.6 kennenlernen werden. Ab dem späten 16. Jahrhundert gab es die bereits diskutierte *gleichstufige* Stimmung, diskutiert von Chu Tsai-yü in China (1584), Gioseffo Zarlino (1588) und Simon Stevin (ca. 1600). Im 18. Jahrhundert gab es zunehmend mehr Befürworter der gleichstufigen Stimmung und im 19. Jahrhundert setzte sie sich endgültig durch. Heutzutage sind fast ausnahmslos alle Instrumente gleichstufig gestimmt.

7.2 Dreiklänge

Ein *Dreiklang* ist ein Tripel von Zahlen $x < y < z$. Wir bezeichnen einen Dreiklang als

<i>reinen Dur-Dreiklang</i> ,	falls $z = 3/2 \cdot x$ und $y = 5/4 \cdot x$;
<i>reinen Moll-Dreiklang</i> ,	falls $z = 3/2 \cdot x$ und $y = 6/5 \cdot x$;
<i>reinen übermäßigen Dreiklang</i> ,	falls $z = 5/4 \cdot y$ und $y = 5/4 \cdot x$ und
<i>reinen verminderten Dreiklang</i>	falls $z = 6/5 \cdot y$ und $y = 6/5 \cdot x$.

Diese Dreiklänge heißen *rein* und wir bezeichnen die Eigenschaft „Dur“, „Moll“, „übermäßig“ oder „vermindert“ als das *Tongeschlecht* oder den *Modus* eines reinen Dreiklangs.

Wir führen eine formale Notation für Dreiklänge ein.

Definition 43. Eine *Dreiklangsbezeichnung* ist von der Form $X : Y : Z$, wobei X , Y und Z Tonbezeichnungen sind, so daß $d_g(X, Y) = 2$ und $d_g(Y, Z) = 2$, sowie $d_f(X, Y), d_f(Y, Z) \in \{3, 4\}$.

Wie bei den Dreiklängen können wir das *Tongeschlecht* oder den *Modus* einer Dreiklangsbezeichnung definieren: wir bezeichnen eine formale Dreiklangsbezeichnung als

<i>Dur</i> ,	falls $d_f(X, Y) = 4$ und $d_f(Y, Z) = 3$;
<i>Moll</i> ,	falls $d_f(X, Y) = 3$ und $d_f(Y, Z) = 4$;
<i>übermäßig</i> ,	falls $d_f(X, Y) = 4$ und $d_f(Y, Z) = 4$ und
<i>vermindert</i> ,	falls $d_f(X, Y) = 3$ und $d_f(Y, Z) = 3$.

Z.B. ist $C : E : G$ eine Dur-Dreiklangsbezeichnung, weil $d_f(C, E) = 4$ und $d_f(E, G) = 3$. Es handelt sich also bei den Dur- und Moll-Dreiklangsbezeichnungen jeweils um die erste, dritte und fünfte Tonbezeichnung in der formalen Dur- oder Moll-Tonleiter.

Aufgabe 43. Stellen Sie fest, welche der folgenden Dreiklänge Dur, Moll, vermindert oder übermäßig sind: $C : E\flat : G$, $D : F\sharp : A\sharp$, $E\sharp : G\sharp : B$, $F : A : C\sharp$, $G : B : D$, $A\flat : C\flat : E\flat$ und $B : D : F$.

Definition 44. Sei T eine Stimmung und $X : Y : Z$ eine Dreiklangsbezeichnung. Wir sagen, daß T *rein für* $X : Y : Z$ ist, wenn die Zahlen $\{T(X), T(Y), T(Z)\}$ einen reinen Dreiklang desselben Tongeschlechtes bilden.

Wie in Abschnitt 7.1 beschrieben, können wir innerhalb der pythagoräischen Stimmung keine reinen Dreiklänge finden (weil der Primfaktor 5 in keinem Intervall auftauchen kann).

Korollar 45. Die pythagoräische Stimmung ist für keine Dreiklangsbezeichnung rein.

Wir überlegen nun, wie wir die pythagoräische Stimmung modifizieren müssen, um einen reinen Dreiklang zu erhalten. In Abschnitt 7.1 hatten wir gesehen, daß für die Dreiklangsbezeichnung $C : E : G$ das Intervall $C : E$ um das syntonische Komma $81/80$ von der großen Terz abweicht und somit der Dreiklang nicht rein ist.

Verringern wir also in der pythagoräischen Stimmung den Wert von E um ein syntonisches Komma, d.h. ersetzen wir die Zahl $81/64$ durch $81/64 \cdot 80/81 = 5/4$, so erhalten wir eine Stimmung, die rein für $C : E : G$ ist.

C	D	E	F	G	A	B
1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$27/16$	$16/9$

Für die westliche klassische Musik spielt nicht nur der Dreiklang über dem Grundton (der Tonica) eine wichtige Rolle, sondern auch die Dreiklänge über Subdominante und Dominante. Die obige Stimmung mit modifiziertem E ist zwar rein für $C : E : G$, aber nicht für die Dur-Dreiklangsbezeichnungen der Subdominante (also $F : A : C$) und Dominante (also $G : B : D$). Berechnen wir die entsprechenden Intervalle in der pythagoräischen Stimmung, so erhalten dieselben Werte, die wir im Dreiklang $C : E : G$ gesehen haben, also ist auch hier der mittlere Ton um ein syntonisches Komma zu hoch für eine große Terz.

$$\begin{aligned}
 F : A &= 27/16 \cdot 3/4 = 81/64, \\
 A : C &= 2 \cdot 16/27 = 32/27, \\
 G : B &= 243/128 \cdot 2/3 = 81/64 \text{ und} \\
 B : D &= 2 \cdot 9/8 \cdot 128/243 = 32/27.
 \end{aligned}$$

Um also auch $F : A : C$ und $G : B : D$ mit Terzschritten zu versehen, müssen auch A und B um ein syntonisches Komma reduziert werden. Dies wird uns in Abschnitt 7.3 zur sogenannten *reinen Stimmung* führen.

7.3 Reine Stimmungen

Wie im letzten Abschnitt besprochen, modifizieren wir nun die pythagoräische Stimmung, um die Dreiklänge $C : E : G$, $F : A : C$ und $G : B : D$ rein zu stimmen. Hierfür verringern wir die mittleren Töne der drei Dreiklänge um ein syntonisches Komma und erhalten $^{81/64} \cdot ^{80/81} = 5/4$ für E (wie zuvor), $^{27/16} \cdot ^{80/81} = 5/3$ für A und $^{243/128} \cdot ^{80/81} = 15/8$ für B.

C	D	E	F	G	A	B
1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$

Diese Stimmung ist nun rein für C-Dur, F-Dur und G-Dur. Um auch die Moll-Dreiklänge $C : E\flat : G$, $F : A\flat : C$ und $G : B\flat : D$ rein zu stimmen, müssen wir $E\flat$ auf $6/5$, $A\flat$ auf $4/3 \cdot 6/5 = 8/5$ und $B\flat$ auf $3/2 \cdot 6/5 = 9/5$ setzen und erhalten die *reine Stimmung für C*, welche rein für C-Dur, C-Moll, F-Dur, F-Moll, G-Dur und G-Moll ist.

C	D	$E\flat$	E	F	G	$A\flat$	A	$B\flat$	B
1	$9/8$	$6/5$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$8/5$	$5/3$	$9/5$	$15/8$

Durch die Modifikation der Töne E, A und B tritt nun allerdings ein unerwünschtes Phänomen auf: sehen wir uns z.B. die Doppeldominante D zu C an: können wir sicherstellen, daß auch deren Dur-Dreiklang rein ist? Der D-Dur-Dreiklang ist $D : F\sharp : A$ und der Ton $F\sharp$ ist bislang noch nicht in unseren Modifikationen aufgetaucht; wir können ihn also auf $9/8 \cdot 5/4 = 45/32$ stimmen, um eine große Terz $D : F\sharp$ zu erhalten. Aber wie sieht es mit dem Tonintervall $D : A$ aus? Der Ton D hat seine pythagoräische Stimmung ($9/8$), aber der Ton A war um ein syntonisches Komma verringert worden: das Tonintervall $D : A$ ist also keine Quinte mehr, sondern ein syntonisches Komma kleiner als eine Quinte:

$$5/3 \cdot 8/9 = 40/27 = 3/2 \cdot 80/81.$$

Wir haben also durch unsere Anpassung der Terzen einige der Quinten verloren und daran können wir auch nichts ändern, ohne die Reinheit für C zu verlieren, da die Werte für D und A durch die G-Dur und F-Dur-Dreiklänge vorgegeben sind.

Satz 46. Eine Tonleiter, die rein für C-Dur und G-Dur ist, ist nicht rein für D-Dur.

Beweis. Die Reinheit für C-Dur, F-Dur und G-Dur impliziert, daß $F = 4/3$, $G = 3/2$ $G : D = 3/2$, also $D = 9/8$. Ebenso $F : A = 5/4$ und somit $A = 5/4 \cdot 4/3 = 5/3$; daher kann der Dreiklang $D : F\sharp : A$ nicht rein sein, weil $D : A = 5/3 \cdot 8/9 = 40/27 \neq 3/2$ keine Quinte ist. Q.E.D.

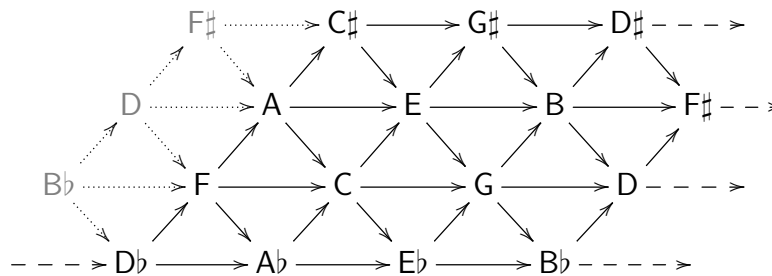
Instrumente in reiner Stimmung sind also optimiert für spezifische Tonarten und nicht notwendigerweise geeignet für das Spielen in anderen Tonarten. Es ist wiederum eine musik-kulturabhängige Frage, wie stark diese Situation als Problem empfunden wird: Musik, die mit relativ wenigen Tonarten auskommt (was bei spätmittelalterlicher und Renaissance-Musik oft der Fall ist) oder einen Instrumentenwechsel erlaubt, kann die negativen Nebeneffekte der reinen Stimmungen ignorieren.

Aufgabe 44. Zeigen Sie, daß man eine Tonleiter definieren kann, die rein für C-Dur, F-Dur, G-Dur, $B\flat$ -Dur, A-Dur, E-Dur und B-Dur ist.

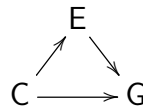
7.4 Die Eitz-Notation

Die folgende sehr elegante Notation, die einen schnellen und vollständigen Überblick über die Dreiklangeigenschaften einer Tonleiter oder Stimmung gibt, wurde von Carl Eitz (1848–1924) eingeführt. Für diese Notation stellen wir uns die Quintenspirale als unendlich lange Kette von Quinten vor.

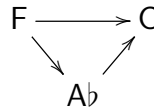
Für jede Tonbezeichnung X tauchen die beiden anderen Tonbezeichnungen aus dem Dur-Dreiklang ebenfalls in der Quintenspirale auf: ist dieser Dreiklang $X : Y : Z$, so ist Z die nächste Quinte in der Spirale, also der Eintrag direkt hinter X ; Y findet sich exakt vier Schritte hinter X in der Spirale. Das liegt an der Definition der Zuweisung der Tonbezeichnungen: jeder Quintschritt erhöht den Grundabstand um 4 und den Feinabstand um 7. Das bedeutet, daß vier Quintschritte den Grundabstand um $4 \cdot 4 = 16 = 2 \pmod{7}$ und den Feinabstand um $4 \cdot 7 = 28 = 4 \pmod{12}$. Also treffen vier Quintschritte genau Y . Stellen wir uns nun mehrere Kopien der geradegezogenen Quintenspirale vor, die so aneinandergelegt werden, dass sie um dreieinhalb Schritte versetzt sind, dann liegt für jeden Grundton die große Terz schräg oberhalb in der nächsthöheren Kopie der Quintenspirale.



In diesem Diagramm zeigen sich sowohl nach oben als auch nach unten zeigende Dreiecke. Die nach oben zeigenden Dreiecke sind genau die Dur-Dreiklangsbezeichnungen, z.B.

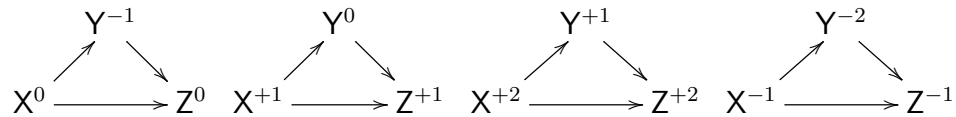


und die nach unten zeigenden Dreiecke entsprechen genau den Moll-Dreiklangsbezeichnungen.

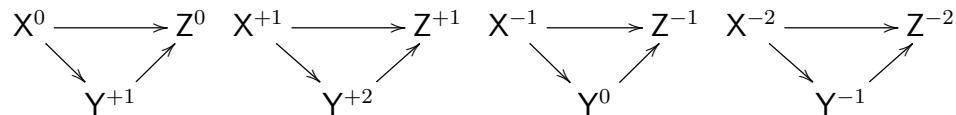


Statt die Stimmung für die einzelnen Töne explizit anzugeben, vermerkt die Eitz-Notation lediglich die Abweichung von der pythagoräischen Stimmung: ein Ton, der in pythagoräischer Stimmung auftaucht, erhält den Exponenten 0; ein Ton, der um x syntonische Kommas erhöht ist, erhält den Exponenten $+x$; ein Ton, der um x syntonische Kommas verringert ist, erhält den Exponenten $-x$. Wir werden im folgenden auch Stimmungen betrachten, bei denen Töne um pythagoräische Kommas erhöht oder verringert sind: in diesem Falle schreiben wir Exponenten $+xp$ und $-xp$, bzw. $+x+yp$ für einen Ton, der um x syntonische und y pythagoräische Kommas erhöht ist, etc.

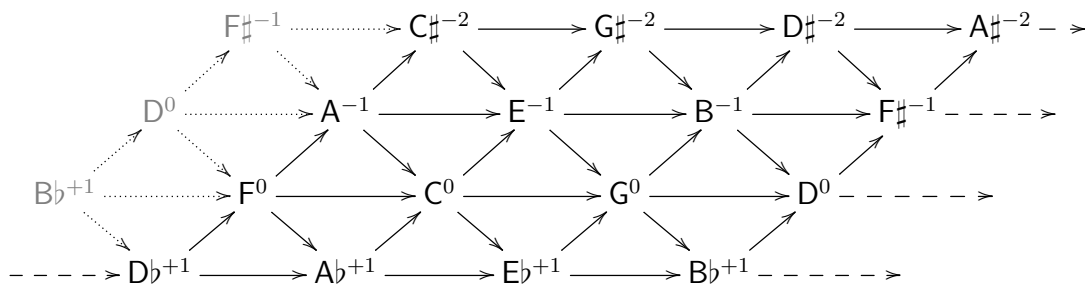
Damit ein Dur-Dreiklang rein ist, müssen der erste und dritte Ton gleich gestimmt sein und der mittlere Ton muß um ein syntonisches Komma niedriger liegen als anderen beiden.



Beim Moll-Dreiklang muss der mittlere Ton um ein syntonisches Komma erhöht werden, damit der Dreiklang rein ist.



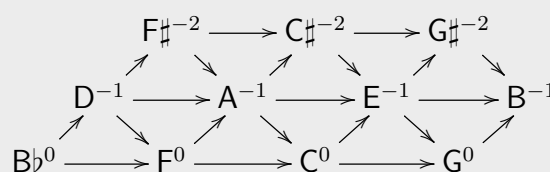
Die reine Stimmung in Eitz-Notation. Wir können also die reine Stimmung (für C) in der Eitz-Notation sehr einfach angeben.



Man erkennt, daß die Dreiklänge der Tonarten F, C und G rein sind (sowohl Dur als auch Moll), aber auch A, E und B (allerdings ein syntonisches Komma nach unten verschoben) und bei den Dur-Dreiklängen auch D $\flat$, A $\flat$ und E $\flat$ (ein syntonisches Komma nach oben verschoben). Zwischen diesen Dreiergruppen sitzt jeweils eine Tonart, welche nicht rein ist, weil ihre Quinte um ein syntonisches Komma verstimmt ist: dies sind B $\flat$ (zwischen E $\flat$ und F) und D (zwischen G und A).

Aufgabe 45. Zeigen Sie, daß in der reinen Stimmung die Töne G $\sharp$, D $\sharp$ und A $\sharp$ die Werte $\frac{25}{16}$, $\frac{75}{64}$ und $\frac{225}{128}$ erhalten.

Aufgabe 46. Betrachten Sie die folgende Stimmung in Eitz-Notation und zeigen Sie, daß in dieser Stimmung B $\flat$ -Dur, F-Dur, C-Dur, D-Dur, A-Dur und E-Dur rein sind, aber G-Dur nicht. Kann man durch Wahl der Stimmung von D $\sharp$ dafür sorgen, daß die Stimmung auch rein für B-Dur wird?



Aufgabe 47. Geben Sie die Eitz-Notation für eine Stimmung an, die rein für G-Dur, D-Dur und A-Dur ist.

Bei der reinen Stimmung erhöhen wir jeweils Blöcke von vier Quinten um ein syntonisches Komma. Das bedeutet, daß wir $A\sharp^{-2}$, $E\sharp^{-3}$ und $B\sharp^{-3}$ haben. Der enharmonische Abstand von C und $B\sharp$ (und allgemein jeder enharmonische Abstand, der ja genau bei zwölf Quinten auftritt) ist somit s^3p^{-1} , also drei syntonische Kommas minus ein pythagoräisches Komma, also

$$s^3p^{-1} = \left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^3 \cdot \frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{3^{12}}{2^{12} \cdot 5^3} \cdot \frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{2^7}{5^3} \approx 1,024 \approx 41 \text{ Cent.}$$

Der enharmonische Fehler der pythagoräischen Stimmung wurde also fast verdoppelt. Dieses Intervall s^3p^{-1} wird auch als die *kleine Diësis* bezeichnet.

Aufgabe 48. Definieren Sie eine Stimmung, bei der $C : E = 5/4$, $C : F = 4/3$, $C : G = 3/2$, $E : F = B : C$, $C : D = D : E$ und $G : A = A : B$. Geben Sie diese Stimmung in Eitz-Notation und bestimmen Sie, ob sie rein für C-Dur, G-Dur und F-Dur ist. Berechnen Sie die Größe aller Ganztonschritte in dieser Stimmung; sind alle Ganztonschritte gleich groß? Können Sie durch Stimmung weiterer Töne die folgenden Dreiklänge rein stimmen (wenn ja, geben Sie an, welchen Ton Sie wie stimmen müssen, um den Dreiklang rein zu stimmen; wenn nein, geben Sie den Grund an, warum dieser Dreiklang nicht rein sein kann): A-Dur, E-Dur, D-Dur und B-Dur.

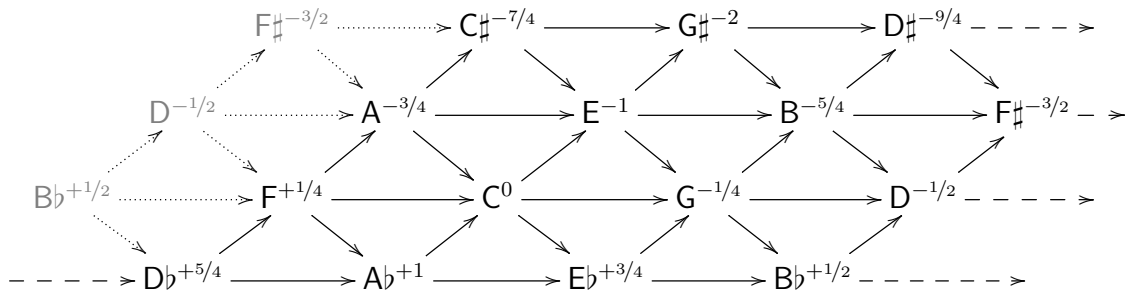
7.5 Mitteltönige Stimmungen

Wir haben gesehen, daß in der reinen Stimmung die Verstimmung der D-Dreiklänge daran liegt, daß man in einem Schritt von der zentralen Reihe F—C—G—D im Eitz-Diagramm auf die um ein syntonisches Komma erhöhte Reihe A—E—B— $F\sharp$ kommen muss. Eine Idee, dieses Problem zu beheben, ist diesen Sprung von einem syntonischen Komma gleichmäßiger zu verteilen, also die Reinheit von F, C und G zu opfern, um die Verstimmung der D-Dreiklänge zu mäßigen oder zu *temperieren*.

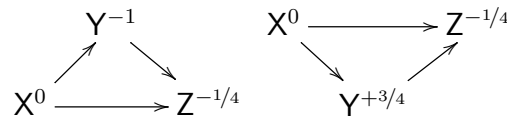
Eine über viele Jahrhunderte sehr beliebte temperierte Stimmung waren die sogenannte *mitteltönigen Stimmungen* und hierbei besonders die *Viertelkomma-Stimmung*: der Mittelton des Dur-Dreiklangs liegt vier Schritte oberhalb des Grundtons im Quintenzirkel liegt und muß um ein syntonisches Komma verringert werden. Verringern wir also systematisch jede Quinte um ein Viertel syntonisches Komma, so ist die große Terz rein. Im Gegenzug haben wir nun alle Quinten unrein gestimmt, allerdings nur um ein Viertel syntonisches Komma, also um

$$\sqrt[4]{s} = \sqrt[4]{\frac{81}{80}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{5}} \approx 5,4 \text{ Cent.}$$

Wir erhalten das folgende Eitz-Diagramm.



Wir stellen fest, daß wie bei der pythagoräischen Stimmung alle Dreiklänge identisch sind. Alle Dur-Dreiklänge haben eine reine große Terz und eine um ein syntonisches Viertelkomma nach unten verstimmt Quinte; alle Moll-Dreiklänge haben sowohl die kleine Terz als auch die Quinte um ein syntonisches Viertelkomma nach unten verstimmt.



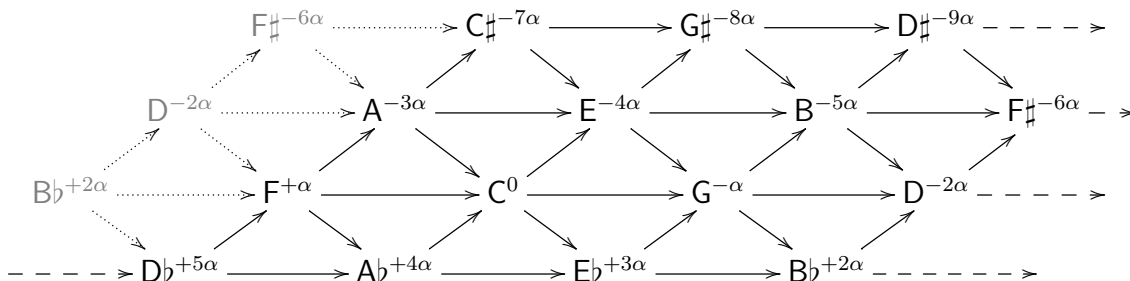
Wie bei der reinen Stimmung schreiten wir für je vier Quinten ein syntonisches Komma nach oben, so daß auch bei der mitteltönigen Stimmung der enharmonische Fehler, also der Abstand zwischen C und B $\sharp$ genau s^3p^{-1} ist, also fast doppelt so groß wie ein pythagoräisches Komma.

Dies ist besonders relevant bei Tasteninstrumenten, welche nur eine Taste haben, die für zwei enharmonische Töne verwendet wird: z.B. die schwarze Taste zwischen C und D muß sowohl für C $\sharp$ $^{-7/4}$ als auch für D $\flat$ $^{+5/4}$ verwendet werden. Stimmen wir diesen Ton als C $\sharp$, so werden die Tonarten, welche ein D $\flat$ benötigen, verstimmt klingen. Z.B. D $\flat$ -Dur hätte in der mitteltönigen Stimmung eigentlich den approximativ reinen Dreiklang D $\flat$ $^{+5/4}$: F $^{+1/4}$: A $\flat$ $^{+1}$ (die große Terz ist rein und die Quinte um ein Viertelkomma verringert), aber ersetzen wir D $\flat$ $^{+5/4}$ durch C $\sharp$ $^{-7/4} = D\flat^{-7/4+1p}$, so ist im Dreiklang

$$D\flat^{-7/4+1p} : F^{+1/4} : A\flat^{+1}$$

die große Terz um s^3p^{-1} (ungefähr 41 Cent) verstimmt und die Quinte um $s^{11/4}p^{-1}$ (ungefähr 35,7 Cent) verstimmt. Dies bezeichnete man als die *Wolfsquinte*, da sie „heult wie ein Wolf“.

Sei α eine beliebige Zahl. Dann geben wir das Eitz-Diagramm der α -Kommastimmung wie folgt.



Für $\alpha = 1/4$ erhalten wir die Viertelkomma-Stimmung; für $\alpha = 0$ erhalten wir die pythagoräische Stimmung.

Aufgabe 49. Zeigen Sie, daß der enharmonische Fehler der α -Kommastimmung $s^{12\alpha}p^{-1}$ ist und die Wolfsquinte um $s^{11\alpha}p^{-1}$ verstimmt ist.

Das bedeutet, daß für $\alpha < 1/4$ der enharmonische Fehler kleiner wird als die kleine Diësis. Bei $\alpha = 1/6$ beträgt er $s^{12/6}p^{-1} = s^2p^{-1}$, ist also ungefähr so groß wie bei der pythagoräischen Stimmung; bei $\alpha = 1/12$ beträgt er $s^{12/12}p^{-1} = sp^{-1}$, ist also ein Schisma.

Aufgabe 50. Berechnen Sie den Wert für α , bei dem der enharmonische Fehler verschwindet, also $s^{12\alpha}p^{-1} = 1$.

Verschiedene Werte für α sind als mitteltönige Stimmungen vorgeschlagen worden, so z.B. $2/7$ (Gioseffo Zarlino, 1558), $1/3$ (Francisco de Salinas, 1577), $1/5$ (Simon Stevin, ca. 1600), $1/6$ (Gottfried Silbermann, 1748) und $1/7$ (Jean Baptiste Romieu, 1755). Im 17. und 18. Jahrhundert waren mitteltönige Stimmungen ein weitverbreiteter Standard für Tasteninstrumente.

Aufgabe 51. Betrachten Sie die $\frac{1}{7}$ -Kommastimmung oder *Romieu-Stimmung* und zeigen Sie, daß es weder reine Quinten noch reine Terzen gibt. Wie groß ist der enharmonische Fehler?

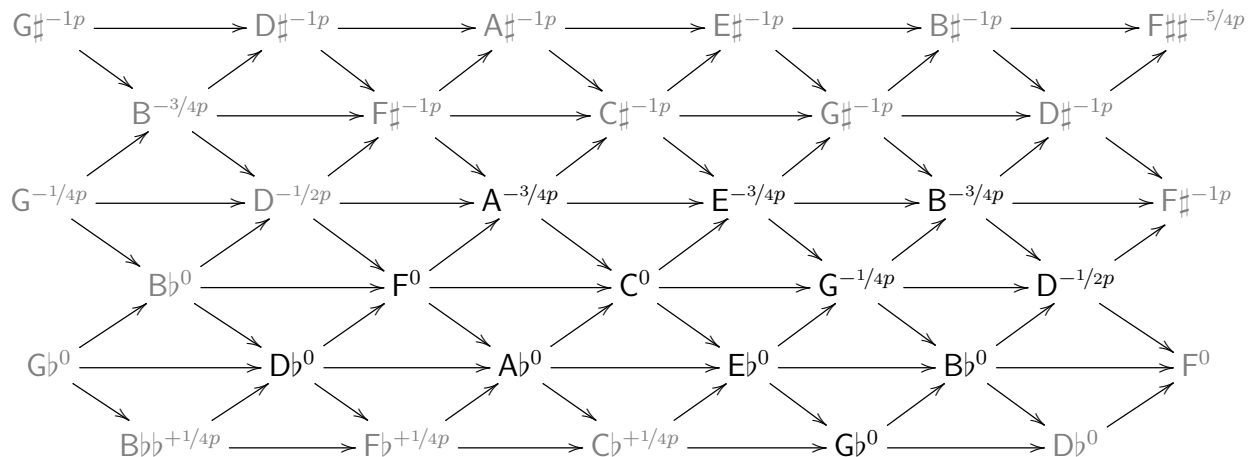
7.6 Wohltemperierte Stimmungen

Da die Wolfsquinte bei komplexeren Tonarten, insbesondere für Tasteninstrumente ein immer größeres praktisches Problem darstellte, versuchte man sich an Verbesserungen der mitteltönigen Stimmungen, die es erlauben, mit dem Tasteninstrument alle Tonarten zu spielen. Einer der wichtigsten Musiktheoretiker der Barockzeit war Andreas Werckmeister (1645–1706), dessen wohltemperierte Stimmungen weite Verbreitung fanden. Werckmeisters berühmten vier Stimmungen werden als *Werckmeister III*, *IV*, *V* und *VI* bezeichnet.¹³ Diese Stimmungen sind hauptsächlich für Tasteninstrumente bestimmt, so daß lediglich zwölf Töne gestimmt werden können, alle anderen Töne müssen durch enharmonische Identifikation übernommen werden: der Abstand zwischen den extremen Tönen der Stimmung sollte also etwa ein pythagoräisches Komma betragen. Die mitteltönige $1/12$ -Kommastimmung (mit dem enharmonischen Fehler von einem Schisma) gibt hier eine erste Idee: die Gesamttemperierung über die elf Töne soll ungefähr ein pythagoräisches (oder syntonisches) Komma betragen. Während die $1/12$ -Kommastimmung diesen Abstand gleichmäßig verteilt, verteilen die wohltemperierten Stimmungen diesen Abstand ungleichmäßig über den Quintenzirkel, um einige Tonarten approximativ rein zu stimmen. Die wohltemperierten Stimmungen werden daher auch *unregelmäßige Stimmungen* genannt.

Die am weitesten verbreitete solche Stimmung ist *Werckmeister III*, welche, ähnlich zur reinen Stimmung, den zentralen Tonarten F und C nahezu reine Stimmungen gibt und dann

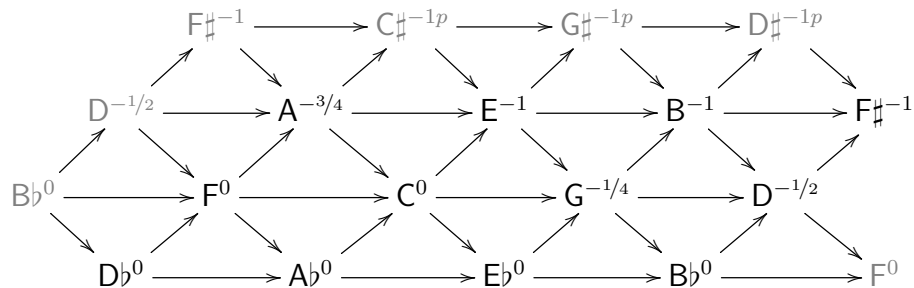
¹³In seinem Werk *Orgel-Probe* listet Werckmeister die reine Stimmung als I und die mitteltönige als II auf. Cf. Andreas Werckmeister. *Orgel-Probe*. Johann Ernst Gleim, 1681.

sowohl nach oben und unten im Quintenzirkel immer pythagoräischer wird. Die Abweichungen von der pythagoräischen Stimmung werden in Vierteln des *pythagoräischen Kommas* gegeben—im Gegensatz zur reinen und mitteltönigen Stimmung, bei denen die Abweichungen in Vielfachen des syntonischen Kommas sind. Die Stimmung hat das folgende Eitz-Diagramm.



Aufgabe 52. Betrachten Sie die Dreiklänge C-Dur, G-Dur, D-Dur, Eb-Dur, Bb-Dur, F-Dur und A-Dur in der Stimmung Werckmeister III. Sind zwei von ihnen strukturell gleich?

Insbesondere fällt auf, daß $G_b^0 = F_{\sharp}^{-1p}$, d.h. der enharmonische Fehler verschwindet vollständig. In seinem späteren Werk gab Werckmeister die wohltemperierten Stimmungen auf und setzte sich für die gleichstufige Stimmung ein.¹⁴ Es ist ein vieldiskutiertes Thema, welche Stimmung Johann Sebastian Bach (1685–1750) für sein Werk *Das wohltemperierte Klavier* (Teil 1, 1722; Teil II 1740/1742) im Sinne hatte. Der Begriff „wohltemperiert“ nimmt direkten Bezug auf Werckmeister. Der Bach-Schüler Johann Philipp Kirnberger (1721–1783) entwickelte verschiedene wohltemperierte Stimmungen, unter anderem die als *Kirnberger III* bekannte Stimmung mit dem folgenden Eitz-Diagramm; sie ist Werckmeister III sehr ähnlich, aber verwendet das syntonische Komma statt des pythagoräischen.¹⁵



¹⁴Andreas Werckmeister. *Musicalische Paradoxal-Discourse*. Calvisius, 1707.

¹⁵Johann Philipp Kirnberger. *Die Kunst des reinen Satzes in der Musik*, Teil 2. Voß, 1779. Die pythagoräischen Modifikationen bei $C_{\sharp}$, $G_{\sharp}$ und $D_{\sharp}$ stammen von der enharmonischen Identifikation mit D_b , A_b und E_b .



Abbildung 10: Die Arp Schnitger-Orgel in der Hauptkirche St. Jacobi in Hamburg. Foto: Benedikt Löwe, 6. April 2024.

Die Arp Schnitger-Orgel in der Hauptkirche St. Jacobi. Die Arp Schnitger-Orgel in der Hamburger Hauptkirche St. Jacobi wurde 1693 erbaut und zu ihrem dreihundertsten Jubiläum im Jahre 1993 von Jürgen Ahrend im Zustand von 1762 wiederhergestellt (s. Abb. 10). Ahrend beschreibt die Diskussion um die Stimmung der Orgel und beschreibt den jetzigen Kompromiß als „modifiziert-mitteltönige $1/5$ syntonische Komma-Stimmung“.¹⁶

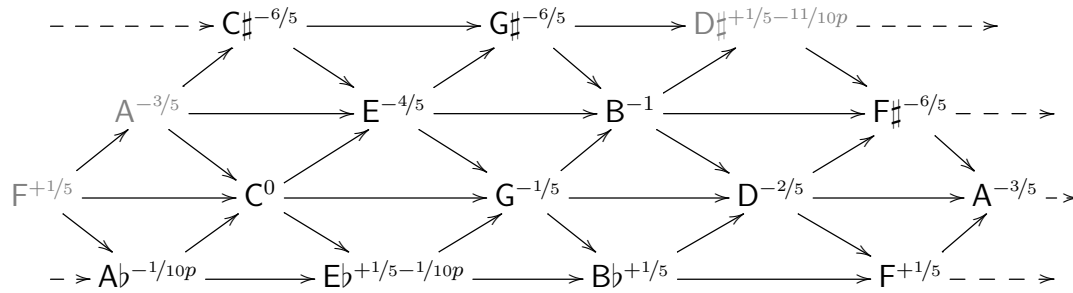
„Sieben Quinten im Untertastensektor F, C, G, D, A, E, B und $F\sharp$ sind um $1/5$ syntonisches Komma verkleinert, drei Quinten sind rein ($F\sharp : C\sharp$, $C\sharp : G\sharp$ und $F : B\flat$), die Quinte $A\flat : E\flat$ ist um $1/5$ syntonisches Komma und die Quinte $E\flat : B\flat$ um $1/10$ pythagoräisches (*sic!*) Komma vergrößert.“¹⁷

Dies ergibt das folgende Eitz-Diagramm mit $D\sharp^{+1/5-11/10p} = E\flat^{+1/5-1/10p}$. Man beachte, daß die obige Beschreibung nicht-identische Stimmungen für $A\flat$ und $G\sharp$ angibt. Da $A\flat^{-1/10p} = G\sharp^{-11/10p}$, existieren in dieser Stimmung (ggf. in verschiedenen Orgelregistern) nicht vollständig reine Oktaven: $G\sharp^{-6/5} : G\sharp^{-11/10p}$ (allerdings sind $s^{6/5} \approx 25,8$ Cent und $p^{11/10} \approx 25,817$ Cent;

¹⁶Jürgen Ahrend. Die Restaurierung der Arp Schnitger-Orgel von St. Jacobi in Hamburg. Bestandsaufnahme und Restaurierungsbericht, zusammengestellt von Günter Lade, mit einem Beitrag von Cornelius Edskes. In: Heimo Reinitzer (Hrsg.). *Die Arp Schnitger-Orgel der Hauptkirche St. Jacobi in Hamburg*. Christians Verlag, 1995. S. 127–265; hier: S. 228.

¹⁷*Op. cit.*, S. 229.

die Differenz ist also etwa 0,02% eines Halbtonschritts oder 1% eines Schismas).



Diese Stimmung hat nicht die charakteristische Eigenschaft von mitteltönigen Stimmungen: eine stark vergrößerte Enharmonie. Stattdessen verschwindet die Enharmonie fast vollständig (die Quinte $G\sharp : D\sharp$ ist approximativ rein, da $s^{6/5} \approx p^{11/10}$, wie oben erwähnt). Man könnte diese Stimmung daher eher als *wohltemperiert* bezeichnen.¹⁸

7.7 Charaktere der Tonarten

In den pythagoräischen, mitteltönigen und gleichstufigen Stimmungen sind alle Tonarten Transpositionen voneinander; nicht so in der reinen Stimmung und den temperierten Stimmungen, die von der frühen Neuzeit bis in das neunzehnte Jahrhundert üblich waren. Das bedeutete, daß die unterschiedlichen Tonarten unterschiedlich klangen. Dies ist im Überblick in Abb. 11 zu sehen, in der die Stimmungen der Durtonleitern für C, F, B $\flat$, E $\flat$ und A $\flat$ ¹⁹ für die pythagoräische, reine, mitteltönige und Werckmeister III-Stimmung gegeben werden.

Man erkennt an dieser Tabelle, wie die mitteltönige Stimmung die Abstände gleichhält und lediglich pro Quinte nach unten im Quintenzirkel um ein Viertelkomma nach oben geht; ebenso sieht man, wie die Werckmeister III-Stimmung sich immer weiter der pythagoräischen Stimmung nähert.

Aufgabe 53. Berechnen Sie, daß die D $\flat$ -Dur-Tonleiter in der Werckmeister III-Stimmung pythagoräisch gestimmt ist. Berechnen Sie die A-Dur-Tonleiter in der Werckmeister III-Stimmung.

¹⁸Ahrend beschreibt die Stimmung wie folgt: „Die letztendlich von mir gefundene Lösung hat nun versucht, beide Positionen [mitteltönig vs. Werckmeister] zu versöhnen. Es war eine Temperierungsart gesucht, die einerseits nahe bei einem mitteltönigen Modell liegt, aber andererseits den Rahmen der spielbaren Tonarten nicht zu eng steckt. Gefunden wurde eine Stimmung, die 8 Quinten um $1/5$ des syntonischen Kommas temperiert, mit 2 reinen und zwei leicht überschwebenden den Zirkel schließt und so eine relativ starke Charakteristik der ‚guten‘ und ‚schlechten‘ Tonarten erreicht. Ist die Terz in C-Dur und F-Dur mit +4,4 Cent noch sehr nahe bei dem reinen Intervall angesiedelt, so sind die Durterzen der peripheren Tonarten F $\sharp$ -Dur und C $\sharp$ -Dur mit +26 Cent sehr gespannt. Die Tonarten, die im mitteltönigen System überhaupt nicht verwendbar sind, kommen jetzt zumindest für kurze Ausweichungen und unter bestimmten klanglichen Voraussetzungen in Frage, sind aber nicht als Grundtonarten benutzbar. Die mitteltönigen Zentraltonarten zeigen sich aufgrund der guten Terzen und Quinten außerordentlich harmonisch, die Chromatik ist charakteristisch mit ungleichen Halbtönen, hat jedoch nicht die typisch mitteltönigen Eigenschaften (*Op. cit.*, S. 228).“

¹⁹Mit C-Dur bestehend aus C, D, E, F, G, A, B; F-Dur bestehend aus F, G, A, B $\flat$, C, D, E; B $\flat$ -Dur bestehend aus B $\flat$, C, D, E $\flat$, F, G, A; E $\flat$ -Dur bestehend aus E $\flat$, F, G, A $\flat$, B $\flat$, C, D; und A $\flat$ -Dur bestehend aus A $\flat$, B $\flat$, C, D $\flat$, E $\flat$, F, G.

Halbtonschritte	0	2	4	5	7	9	11
Pythagoräische Stimmung							
C-Dur	0	0	0	0	0	0	0
F-Dur	0	0	0	0	0	0	0
B $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	0
E $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	0
A $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	0
Reine Stimmung für C							
C-Dur	0	0	-1	0	0	-1	-1
F-Dur	0	0	-1	+1	0	0	-1
B $\flat$ -Dur	+1 0	0 -1	0 -1	+1 0	0 -1	0 -1	-1 -2
E $\flat$ -Dur	+1 0	0 -1	0 -1	+1 0	+1 0	0 -1	0 -1
A $\flat$ -Dur	+1 0	+1 0	0 -1	+1 0	+1 0	0 -1	0 -1
Mitteltönige Stimmung							
C-Dur	0	-1/2	-1	+1/4	-1/4	-3/4	-5/4
F-Dur	+1/4 0	-1/4 -1/2	-3/4 -1	+1/2 +1/4	0 -1/4	-1/2 -3/4	-1 -5/4
B $\flat$ -Dur	+1/2 0	0 -1/2	-1/2 -1	+3/4 +1/4	+1/4 -1/4	-1/4 -3/4	-3/4 -5/4
E $\flat$ -Dur	+3/4 0	+1/4 -1/2	-1/4 -1	+1 +1/4	+1/2 -1/4	0 -3/4	-1/2 -5/4
A $\flat$ -Dur	+1 0	+1/2 -1/2	0 -1	+5/4 +1/4	+3/4 -1/4	+1/4 -3/4	-1/4 -5/4
Werckmeister III							
C-Dur	0	-1/2p	-3/4p	0	-1/4p	-3/4p	-3/4p
F-Dur	0	-1/4p	-3/4p	0	0	-1/2p	-3/4p
B $\flat$ -Dur	0	0	-1/2p	0	0	-1/4p	-3/4p
E $\flat$ -Dur	0	0	-1/4p	0	0	0	-1/2p
A $\flat$ -Dur	0	0	0	0	0	0	-1/4p

Abbildung 11: Tonleitern der Tonarten C-Dur, F-Dur, B $\flat$ -Dur, E $\flat$ -Dur und A $\flat$ -Dur in der pythagoräischen, reinen, mitteltönigen und Werckmeister III-Stimmung. Die Stimmung wird in Abweichung von der pythagoräischen Stimmung angegeben und auf den Grundton normalisiert.

Wie bei der Diskussion um den Zusammenhang von Wohlklang und Harmonie können wir auf der Grundlage der mathematischen Gegebenheiten nur feststellen, daß ein Unterschied vorliegt und diesen Unterschied mathematisch beschreiben; wir können nicht sagen, welche Auswirkung dieser Unterschied auf die Wahrnehmung der Tonarten hat. In den Jahrhunderten, in denen temperierte Stimmungen die Norm waren, bildeten sich Vorstellungen heraus, welche den Charakter von Tonarten beschreiben. Allerdings stellt man schnell fest, dass diese Vorstellungen oft nicht wirklich stabil waren und derselben Tonart oftmals sehr unterschiedliche Charaktere nachgesagt wurden. Wir geben einige Auszüge aus solchen Beschreibungen aus dem 17. bis 19. Jahrhundert.²⁰ Ein Teil der Diskrepanzen in den Beschreibungen kann ggf. dadurch erklärt werden, daß es keine Standardstimmung unter den temperierten Stimmungen gab und somit je nach Wahl der Stimmung unterschiedliche Tonarten sehr unterschiedlich klingen konnten.

C-Dur. „Freudig und kriegerisch“ (Charpentier); „nicht sehr edel, aber auch gar nicht gemein“ (Ribock); „ganz rein“ (Schubart); „eine Mischung von heiterer Fröhlichkeit und sanftem Ernst“ (Kellner); „heiter und rein“ (Knecht).

G-Dur. „Süß und freudig“ (Charpentier); „fröhlich und glänzend“ (Masson); „angenehm und ländlich“ (Knecht); „beruhigend“ (Rochlitz); „ein wenig fröhlich mit einer Richtung ins Gewöhnliche“ (Berlioz).

D-Dur. „Freudig und sehr kriegerisch“ (Charpentier); „etwas scharf und eigensinnig“ (Mattheson); „aufbrausende Munterkeit“ (Vogler); „der Ton des Triumphes, des Hallelujas, des Kriegsgeschreis, des Siegesjubels“ (Schubart); „pompös und rauschend“ (Knecht).

A-Dur. „Freudig und ländlich“ (Charpentier); „Ausdruck der Freude, der Fröhlichkeit, des Tanzes“ (Ribock); „fröhlich und hell“ (Knecht).

E-Dur. „Lärmend und laut“ (Charpentier); „verliebte und dabei zärtliche Leidenschaft“ (Vogler); „feurig und wild“ (Knecht); „eine der hellsten, stärksten Farben“ (Hand); „glänzend, prächtig, erhaben“ (Berlioz).

F-Dur. „Wütend und temperamentvoll“ (Charpentier); „Gefälligkeit und Ruhe“ (Schubart); „sehr still“ (Vogler); „sanft und ruhig“ (Knecht).

B $\flat$ -Dur. „Großartig, freudig“ (Charpentier); „Majestät, ruhig in seiner Größe“ (Ribock); „heitere Liebe, gutes Gewissen, Hoffnung“ (Schubart); „lieblich und zärtlich“ (Knecht).

²⁰In alphabetischer Reihenfolge: Hector Berlioz. *Grand Traité d'Instrumentation et d'Orchestration Modernes*. Henry Lemoine & Co., 1844. Marc-Antoine Charpentier. *Règles de composition*. 1692. Ferdinand Gotthelf Hand. *Ästhetik der Tonkunst. Erster Theil*. C. Hochhausen und Fournes, 1837. Georg Christoph Kellner, Etwas von Tönen und Tonarten. *Magazin der Musik* 2 (1786). Justin Heinrich Knecht. *Allgemeiner musikalischer Katechismus*. Gebrüder Knecht, 1803. Charles Masson. *Nouveau Traité des Règles de la Composition de la Musique*. Christophe Ballard, 1705. Johann Mattheson. *Der vollkommene Capellmeister*. Christian Herold, 1739. Justus Johannes Heinrich Ribock. Über Musik, an Flötenliebhaber insonderheit. *Magazin der Musik* 1 (1783). Johann Friedrich Rochlitz *Für Freunde der Tonkunst*. Carl Cnobloch, 1832. Christian Friedrich Daniel Schubart. *Ideen zu einer Ästhetik der Tonkunst*. J. V. Degen, 1806. Georg Joseph Vogler. *Système de Simplification pour les Orgues*. Manuskript, 1798.

E♭-Dur. „Grausam und hart“ (Charpentier); „der Ton der Liebe, der Andacht, des traulichen Gesprächs mit Gott“ (Schubart); „prächtig und feierlich“ (Knecht); „majestätisch, durchaus vollklingend, süß, schwermütig“ (Berlioz).

A♭-Dur. „Tod, Grab, Verwesung“ (Schubart); „die Tonart, bei welcher die Seele für ein Überirdisches aufgeht“ (Hand); „süß, verhangen und sehr edel“ (Berlioz).

Da eine präzise Sprache für hervorgerufene Emotionen fehlt, müssen metaphorische Beschreibungen ihre Stelle einnehmen. Die Beschreibungen erinnern an metaphorische Beschreibungen aus der Önologie und Justus Ribock (1743–1785) nennt für die meisten Tonarten synästhetisch anmutende Farb- und Geruchsbeschreibungen, die den önologischen Beschreibungen von Weinbouquets noch ähnlicher sind. So nennt er A-Dur „schön sächsisch-grün“ mit „zitronen-erfrischendem Geruch“, sagt zu C-Dur, dass es lila sei und nach Schneeglöckchen rieche; zu E-Dur, daß es gelb sei und nach Muskatblüten rieche und zu B♭-Dur, daß es „glänzendes Karmesin“ sei.²¹

Auch hier (wie bei der Frage, ob bestimmte Tonintervalle wohlklingend sind) gilt, daß die Frage, ob bestimmte Tonarten verlässlich und auf stabile Art und Weise bestimmte Emotionen hervorrufen, eine empirische Frage ist, die von kognitiven Psychologen im Experiment untersucht werden muß. Es ist zu erwarten, daß hier kulturelle Aspekte (wie bei der *Gewohntheit* beim Wohlklangempfinden) eine noch bedeutendere Rolle spielen. Da es heutzutage fast keine Hörerfahrung in anderen Stimmungen als der gleichstufigen Stimmung gibt, ist diese Frage für die heutige musikalische Praxis nicht besonders relevant.

²¹Eine interessante Lösung ist die literarische Herangehensweise bei E. T. A. Hoffmann (1776–1822) in seinen *Kreisleriana* (II.3), in denen er die Charaktere der Tonarten nicht in Adjektiven, sondern in poetischer Form beschreibt. So schreibt er für A♭-Dur: „Was rauscht denn so wunderbar, so seltsam um mich her? — Unsichtbare Fittiche wehen auf und nieder — Ich schwimme im duftigen Äther. — Aber der Duft erglänzt in flammenden, geheimnisvoll verschlungenen Kreisen. Holde Geister sind es, die die goldnen Flügel regen in überschwenglich herrlichen Klängen und Akkorden.“ Für E-Dur: „Sie haben mir eine herrliche Krone gereicht, aber was in den Diamanten so blitzt und funkelt, das sind die tausend Tränen, die ich vergoß, und in dem Golde gleißen die Flammen, die mich verzehrten.“ Für F-Dur: „Ha, wie geht das Herz dir auf in Sehnsucht und Liebe, wenn ich dich voll glühendem Entzücken mit Melodien wie mit liebenden Armen umfasse. Für B♭-Dur: „Welch lustiges Leben in Flur und Wald in holder Frühlingszeit! — Alle Flöten und Schalmeien, die Winters über in staubigen Winkeln wie zum Tode erstarrt lagen, sind wach worden und haben sich auf alle Lieblingsstückchen besonnen, die sie nun lustig trillieren, gleich den Vögelein in den Lüften.“ Für E♭-Dur: „Zieh ihm nach! — zieh ihm nach! — Grün ist sein Kleid wie der dunkle Wald — süßer Hörnerklang sein sehndes Wort!“ Und für C-Dur: „Aber in toller, wilder Lust laßt uns über den offenen Gräbern tanzen.“