MODELLE DER MENGENLEHRE

16.2.2021
WS 20/21

VORLESUNG $\overline{XIV}$

$$\Phi_I < \Phi_{2I} < \Phi_{3I} < \ldots < \Phi_{\omega I} < \ldots < \Phi_{\infty I} < \Phi_{II}$$

unerreichbarer Limes von Unerreichbaren

$$C_M(x) \Longrightarrow C_{II}(x)$$

[Methode der Reflektion]

§ 14 Große große Kardinalzahlen

Def. Eine Eigenschaft Φ heißt **$\kappa+1$-stabil** falls die Gültigkeit von Φ nur von $V_{\kappa+1}$ abhängt, d.h. präzise

$$\mathcal{V} \models \Phi(x) \text{ und } V_{\kappa+1} \subseteq M$$

$$\Longrightarrow \mathcal{M} \models \Phi(x)$$

für jedes innere Modell $M \subseteq V_\lambda$.

insbesondere erfüllt, falls M das durch die Ultrapotenz konstruierte innere Modell ist.

Bsp. "α ist regulär"

$$\forall \beta < \alpha \underbrace{\forall f : \beta \longrightarrow \alpha}_{\in V_{\alpha+1}} \; f \text{ ist nicht konfinal}$$

Genauso: α ist Kardinalzahl

α ist starker Limes

$\alpha \longrightarrow (\beta)^2_2$

Dies gilt, falls $\alpha \leq \kappa$.

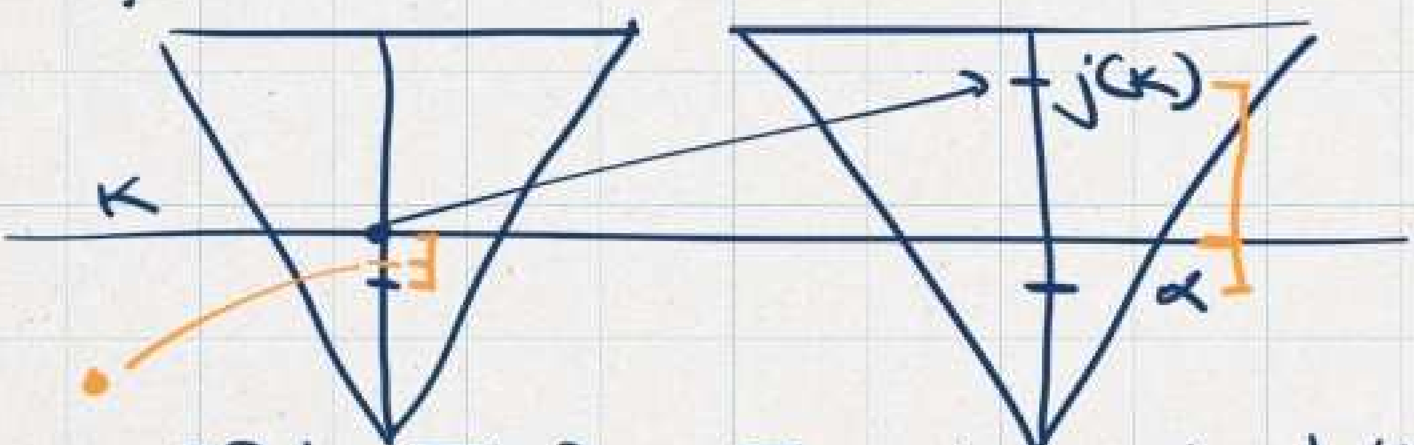
Also sind ~~Eigenschaften~~ wie

schwach unerreichbar

(stark) unerreichbar

schwach kompakt

für $\alpha \leq \kappa$ alle $\kappa+1$-stabil.



Falls $V \models \Phi(\kappa)$, Φ ist $\kappa+1$-stabil, κ ist messbar, so gilt für jedes $\alpha < \kappa$

$$M \models \exists \gamma \quad j(\alpha) < \gamma < j(\kappa) \quad \Phi(\gamma)$$

Elementarität

$$\Longrightarrow V \models \exists \gamma \quad \alpha < \gamma < \kappa \quad \Phi(\gamma)$$

<u>MOTTO</u> Ist κ meßbar und Φ $\kappa+1$-stabil, so reflektiert die Eigenschaft $\Phi(\kappa)$ unterhalb von κ.
Insbesondere kann κ nicht die kleinste Zahl mit Eigenschaft Φ sein.

Daraus folgt: (falls κ meßbar)

$V \models \kappa$ unerreichbar

$\Longrightarrow M \models \kappa$ unerreichbar

und $V \models$ es ex. unbeschränkt viele unerr. unterhalb von κ

Also: $C_M(\kappa) \Longrightarrow C_{II}(\kappa)$.

Aber C_{II} ist auch $\kappa+1$-stabil, daher nach Reflektion:

$$V \models \forall \alpha < \kappa \, \exists \gamma \;\; \alpha < \gamma < \kappa \;\; C_{II}(\gamma).$$

Also sind meßbare "unerreichbare Limiten von unerreichbaren Limiten von unerreichbaren" etc.

Dieselbe Hierarchie für Axiome der Meßbarkeit:

$C_M(\kappa) :\Longleftrightarrow \kappa$ ist meßbar

$C_{2M}(\kappa) :\Longleftrightarrow \kappa$ ist meßbar $\wedge\ \exists \mu < \kappa\ C_M(\mu)$

$C_{3M}(\kappa)$ ...

$C_{\omega M}(\kappa)$

$\Phi_{\infty M}$

$C_{IM}(\kappa) :\Longleftrightarrow C_I(\kappa) \wedge \forall \alpha < \kappa\ \exists \gamma\ \alpha < \gamma < \kappa\ C_M(\gamma)$.

unerreichbarer Limes von meßbaren Kardinalzahlen

Ebenso wie letzte Woche sehen wir:

$\Phi_M < \Phi_{2M}$ Ang. $\underline{\mu < \kappa}$ beide meßbar. Betrachte $V_\kappa \models ZFC$, da κ meßbar und daher unerreichbar.

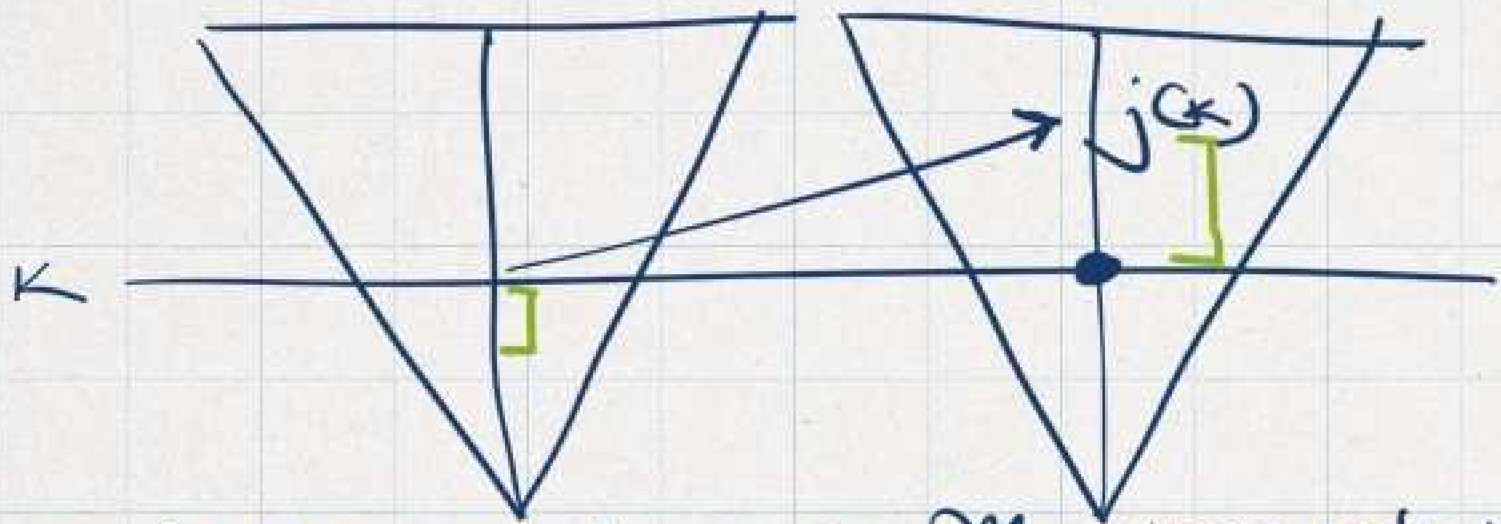
$V_\kappa \models \mu$ ist meßbar

μ war meßbar V_λ, also ex. $U \subseteq \mathcal{P}(\mu)$ μ-vollst. freier Uf. auf μ

Dann $U \in \underline{\underline{V_{\mu+2}}} \subseteq V_\kappa$.

$$\overline{\Phi}_M < \overline{\Phi}_{2M} < \overline{\Phi}_{3M} < \dots < \overline{\Phi}_{\omega M} < \dots < \overline{\Phi}_{\infty M} < \overline{\Phi}_{IM}$$

Cons
[nicht notwendigerweise $<_I$].



Wissen wir, ob κ in $\mathcal{M}$ immer noch meßbar ist?

GA#12: Wenn U der Ultrafilter ist, mit dem M gebildet wurde, so gilt $U \notin M$.

<u>Aber</u> vielleicht ex. ein $U' \in M$, welches immer noch κ-vollst. freier Uf. auf κ ist ???

Ang. $\mathcal{M} \models \kappa$ ist meßbar, dann gibt uns das übliche Reflektionsargument:

$$\mathcal{M} \models \exists \gamma \; \gamma < j(\kappa) \; C_M(\gamma).$$

$$\overset{\text{elem.}}{\Longrightarrow} \mathcal{V} \models \exists \gamma \; \gamma < \kappa \; C_M(\gamma).$$

D.h.: $\mathcal{M} \models \kappa$ ist meßbar $\Longrightarrow$ κ ist nicht die kleinste meßbare Kard.

[Bem. Kontraposition liefert:
Falls κ die kleinste meßbare ist,
so gilt notwendigerweise
$\mathcal{M} \models \kappa$ ist nicht meßbar.]

Gleicher Trick wie vorher. Fixiere $\alpha < \kappa$.
Ang. $\mathcal{M} \models \kappa$ ist meßbar.

Dann gilt $\mathcal{M} \models \exists \gamma \ j(\alpha) < \gamma < j(\kappa) \ C_M(\gamma)$

$\overset{\text{elem.}}{\Longrightarrow} V \models \exists \gamma \ \alpha < \gamma < \kappa \ C_M(\gamma)$

D.h. $\boxed{\mathcal{M} \models \kappa \text{ ist meßbar}}$

$\Longrightarrow$ es ex. unbeschränkt viele meßbare unterhalb von κ.

Also $C_{IM}(\kappa)$,
mehr noch $C_{MM}(\kappa) :\Longleftrightarrow C_M(\kappa) \wedge \forall \alpha < \kappa \ \exists \gamma_{\alpha < \gamma < \kappa} \ C_M(\gamma)$.

Dies wird bezeichnet als:
"κ hat Mitchell-Ordnung mindestens 1"

$C_{MO1}(\kappa) :\Longleftrightarrow C_M(\kappa) \wedge$ "$\mathcal{M} \models C_M(\kappa)$".

Zusammenfassend

Φ_{MO1} ist stärker als alles, was wir bisher gesehen haben.

Hintergrund $\Phi(x) :\Longleftrightarrow x$ ist meßbar ist nicht $\kappa+1$-stabil.

Wir brauchen höhere Stabilität, um Meßbarkeit zu erhalten.

Def. Sei α beliebig, dann heißt Φ $\kappa+\alpha$-stabil, falls für alle inneren Modelle $M \subseteq V_\lambda$ gilt

$$\mathcal{V} \models \Phi(\kappa) \text{ und } V_{\kappa+\alpha} \subseteq M$$

$$\Longrightarrow \mathcal{M} \models \Phi(\kappa).$$

Wir hatten gesehen:

falls $\mathcal{V} \models C_M(\kappa)$ und $V_{\kappa+2} \subseteq M$, und U bezeugt, daß κ meßbar ist, so gilt $U \in V_{\kappa+2} \subseteq M$

$$\Longrightarrow \mathcal{M} \models C_M(\kappa).$$

D.h. C_M ist $\kappa+2$-stabil.

Bemerkung GA #12 zeigte, daß falls M der Mostowskikollaps einer Ultrapotenz auf κ ist, so gilt nicht

$$V_{\kappa+2} \subseteq M$$

Insbesondere werden $\kappa+2$-stabile Eig. i.a. nicht erhalten.

Def. Eine elementare Einbettung $j: V_\lambda \to M$ mit kritischem Punkt $\kappa = \mathrm{crit}(\kappa) = \mathrm{c.p.}(\kappa)$ heißt *γ-stark* falls $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$.

Wir hatten gesehen:

falls $j = j_U$ [die von einem Ultrafilter abgeleitete Einbettung], so ist j 1-stark, aber nicht 2-stark.

Def. Eine Kardinalzahl κ heißt *γ-stark* falls es eine elem. Einbettung $j: V_\lambda \to M$ gibt, welche γ-stark ist.

Offensichtlich: falls κ γ-stark ist, so ist κ meßbar

Wie zuvor:

falls $\gamma \geq 2$, so gilt

$\mathfrak{M} \models C_M(\kappa)$, also

über Reflektieren

$C_{MM}(\kappa)$.

AUSBLICK Wir können die Hierarchie der γ-starken Kardinalzahlen untersuchen:

§26 Kanamori

Fundamentalsatz über starke Kardinalzahlen.

κ ist γ-stark $\iff$ ex. $\delta \geq \gamma$ und ein $\mathcal{E}$ EXTENDER

$\mathcal{E} \in \underline{V_{\kappa+\delta}}$ s.d. $\mathcal{E}$ gewisse Eigenschaften hat

Daraus folgt

"κ ist γ-stark" ist $\kappa+\delta$-stabil.

Insbesondere: falls κ δ-stark ist, so gilt

$\mathfrak{M} \models \kappa$ ist γ-stark.

Der Reflektionsmechanismus liefert: κ war nicht die kleinste γ-starke Zahl; es ex. unbeschränkt viele γ-starke Zahlen unterhalb von κ.

CODA

Herr Seifert fragte:

$$U \longmapsto j_U$$

$$\boxed{j \longmapsto U_j}$$

Sind diese Operationen zueinander invers?

Gilt $\quad j_{U_j} = j \quad$ oder $\quad U_{j_U} = U$?

Damalige Antwort: NEIN!

Unsere Theorie der starken Kardinalzahl erläutert diese Antwort:

Sei j eine 2-starke Einbettung $V_{\kappa+2} \subseteq M$.
Bilde den Ultrafilter U_j. Damit via Ultrapotenz und Mostowski

$$j_{U_j} : V_\lambda \longrightarrow M^*$$

Wir wissen, daß j_{U_j} 1-stark, aber nicht 2-stark ist, insbesondere $j_{U_j} \neq j$.

Genauer noch: $M^* \neq M$

Denn nach GA#12 $U_j \notin M^*$, aber

$$U_j \in V_{\kappa+2} \subseteq M.$$

NOTIZEN BEI Q&A NACH DER VL

Vaught-Kriterium: T hat nur unendliche Modelle
T κ-kategorisch $\Longrightarrow$ T vollständig

Falls L Konstantensymbole c_α ($\alpha < \omega_1$) enthält, bilde $T^* = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \,;\, \alpha \neq \beta\}$. Dann ist T^* $\aleph_0$-kategorisch, aber nicht notw. vollständig.

$|L^S| \leq \kappa$ +

$$T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \,;\, \alpha \neq \beta < \kappa\}$$

κ

Sätze.

$$\text{Iso} \Longrightarrow \preccurlyeq \Longrightarrow \equiv$$

$A \equiv B$ $\quad$ $A \subseteq B$

Frage Ang. $A \equiv B$, $A \subseteq B$
ist es möglich, daß $A \not\preccurlyeq B$.
D.h. ex. φ und $a \in A$
s.d. $A \models \varphi(a)$, aber $B \not\models \varphi(a)$.

$B = [0,1] \cap \mathbb{Q}$
$A = [1/2, 3/4] \cap \mathbb{Q}$

$\varphi(3/4)$: $\forall x \, (x \leq 3/4)$

$A \models \varphi(3/4)$

$B \not\models \varphi(3/4)$

$(A, \leq)$ & $(B, \leq)$ sind isomorph, aber $id: A \longrightarrow B$ ist keine elem. Einbettung (& nicht surjektiv)

G1 Es gibt einen wahren Satz φ

$$\mathrm{ZFC} \nvdash \varphi.$$

G2 Ein Bsp. für G1 ist $\varphi = \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC})$.

Es ex. φ mit $\mathrm{ZFC} \nvdash \varphi$

und $\mathrm{ZFC} \nvdash \neg\varphi$.

HILBERTS PROGRAMM

"finitäres System" T

Ziel $T \vdash \mathrm{Cons}(\cancel{\mathrm{PA}}\ \mathrm{ZFC})$

Gödel selbst $T = \mathrm{PA}$ reicht nicht aus

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Cons}(\mathrm{PA}) \implies \mathrm{PA}$ ist inkonsistent.

$$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC})$$

$$\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC})$$

$$\mathrm{ZFC} < \Phi_{I} < \Phi_{2I} < \boxed{\Phi_{3I}} < \dots < \Phi_{II} < \Phi_{M} < \dots < \Phi_{MM}$$

$T \nvdash \mathrm{Cons}(T)$

D.h. nach Vollständigkeit ex. $\mathcal{M}$

$\mathcal{M} \models T \cup \{\neg \mathrm{Cons}(T)\}$

D.h. wir könnten [ohne es zu wissen] in so einem $\mathcal{M}$ leben.

(α, β) $\quad V_\alpha \prec V_\beta$

$V_\beta \models \exists x\, \varphi(\kappa)$ $\quad \beta$

$\uparrow$

$V_\alpha \models \exists x\, \varphi(x)$

Obere Lévy zahl kann definierbar sein.

z.B. κ kleinste Unerreichbare.

φ INNERES MODELL

λ unerreichbar

Def.

$M \subseteq V_\lambda$ transitiv mit

$\mathcal{M} = (M, \in) \models ZFC$ und

$\lambda \subseteq M$