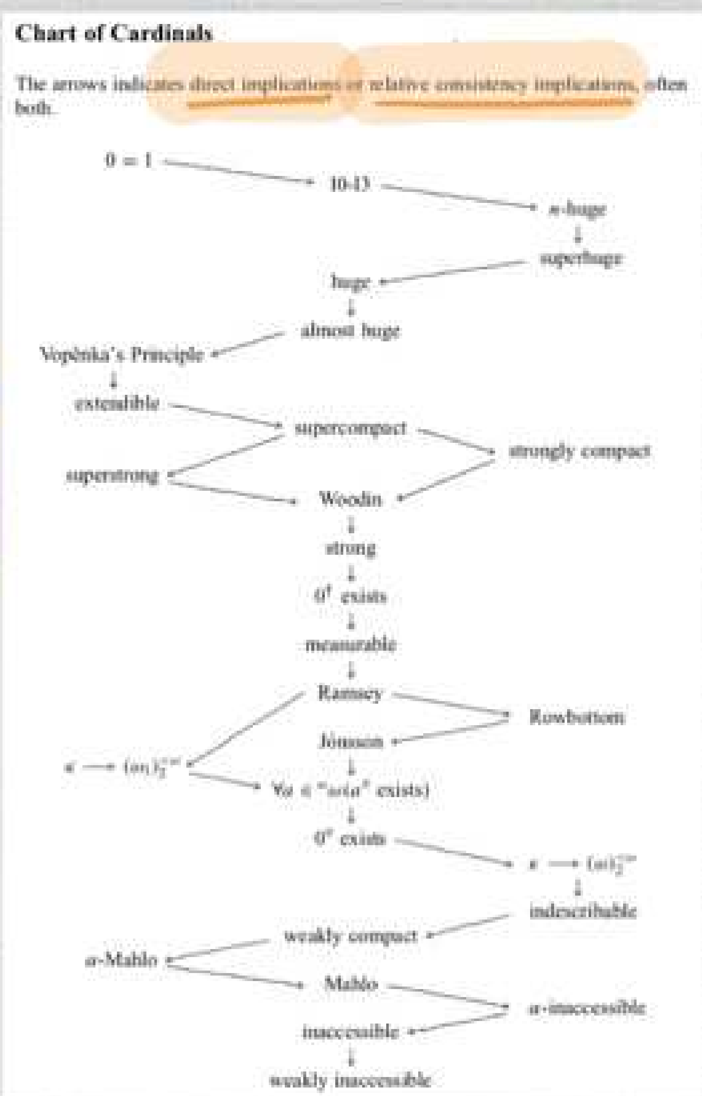
MODELLE DER MENGENLEHRE

WS 20/21
9. Februar 2021

VORLESUNG XIII



§13 Große Kardinalzahlaxiome

$\boxed{\Phi \le_I \Psi}$ (IMPLIKATION)

$:\Longleftrightarrow \mathrm{ZFC} \vdash \Psi \longrightarrow \Phi$

$\boxed{\Phi <_I \Psi}$

$:\Longleftrightarrow \Phi \le_I \Psi \wedge \Psi \not\le_I \Phi$

$\boxed{\Phi \le_{\mathrm{Cons}} \Psi}$ KONSISTENZSTÄRKE

$:\Longleftrightarrow \mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC}+\Psi) \longrightarrow \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC}+\Phi)$

$\boxed{\Phi <_{\mathrm{Cons}} \Psi} \Longleftrightarrow \mathrm{ZFC}+\Psi \vdash \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC}+\Phi)$

Die Tatsache, daß $\Phi <_{\mathrm{Cons}} \Psi \Longleftrightarrow$

$\Phi \le_{\mathrm{Cons}} \Psi \wedge \Psi \not\le_{\mathrm{Cons}} \Phi$

folgt aus dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz.

Heutiges Ziel: Bzh. zwischen $\le_I$ & $\le_{\mathrm{Cons}}$ verstehen.

Weitere Erinnerung

$\boxed{\Phi_I}$ $\quad C_I(x) :\Longleftrightarrow$ x ist stark unerreichbare Kardinalzahl

$\Leftrightarrow \exists x\, C_I(x)$

$C_{2I}(x) :\Longleftrightarrow C_I(x) \wedge \exists y\; y<x.\; C_I(y)$

$\boxed{\Phi_{2I}} \Leftrightarrow \exists x\, C_{2I}(x)$

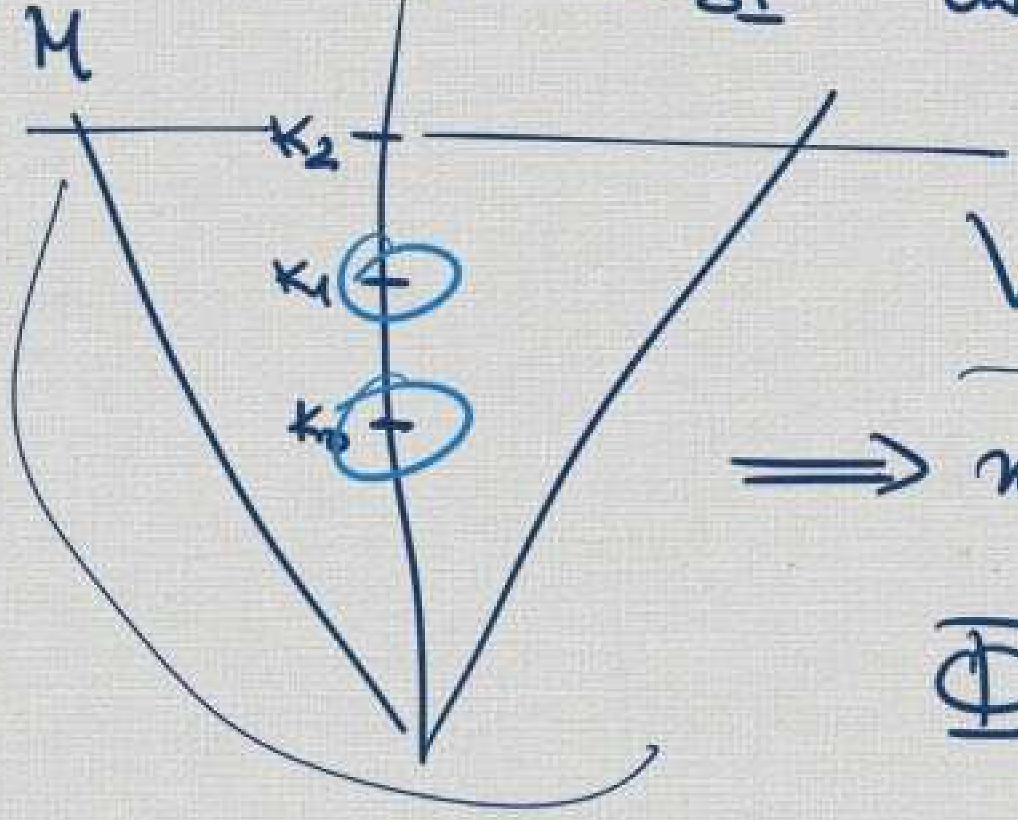
$C_{nI}(x) \longleftrightarrow C_I(x) \wedge \exists y_1 \exists y_1 \dots \exists y_{n-1}\; y_1<y_2<\dots<y_{n-1} \wedge C_I(y_1) \wedge \dots \wedge C_I(y_{n-1})$

$\boxed{\Phi_{nI}} \Leftarrow \exists x\, C_{nI}(x)$

$n>k \quad \Phi_{nI} \Longrightarrow \Phi_{kI}$

d.h. $\quad \Phi_{kI} \leq_I \Phi_{nI}$

$M \models \Phi_{3I}$ und κ_2 ist die dritte unerreichbare, so ist



$V_{\kappa_2} \models ZFC + \Phi_{2I} + \neg\Phi_{3I}$

$\Longrightarrow n>k \quad \Phi_{kI} \not\Rightarrow \Phi_{nI}$

$\Phi_{kI} <_I \Phi_{nI}$.

Dieses Argument zeigt direkt:

falls $M \models \Phi_{3I}$, so gilt

$$M \models \underbrace{\exists X (X \models \Phi_{2I})}_{\mathrm{Cons}(ZFC + \Phi_{2I})}.$$

Also $\Phi_{3I} \Longrightarrow \mathrm{Cons}(ZFC + \Phi_{2I})$

Also [nach Seite 1]:

$$\Phi_{2I} <_{\mathrm{Cons}} \Phi_{3I}.$$

[Ebenso für $k < n$.]

Ein noch stärkeres Axiom:

"es ex. unendlich viele unerreichbare Kardinalzahlen"

Abkürzung $\underset{I}{R}(f) :\Longleftrightarrow f$ ist eine Funktion
$\wedge \forall x, y \in \mathrm{dom}(f)$
$x \in y \longrightarrow f(x) \in f(y)$
$\wedge \forall x \in \mathrm{dom}(f)\ C_I(f(x))$

$$\Phi_{\omega I} :\Longleftrightarrow \exists f \ \mathrm{dom}(f) = \mathbb{N} \wedge R_I(f).$$

Offensichtlich:

$$\Phi_{\omega I} \longrightarrow \Phi_{nI} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}$$

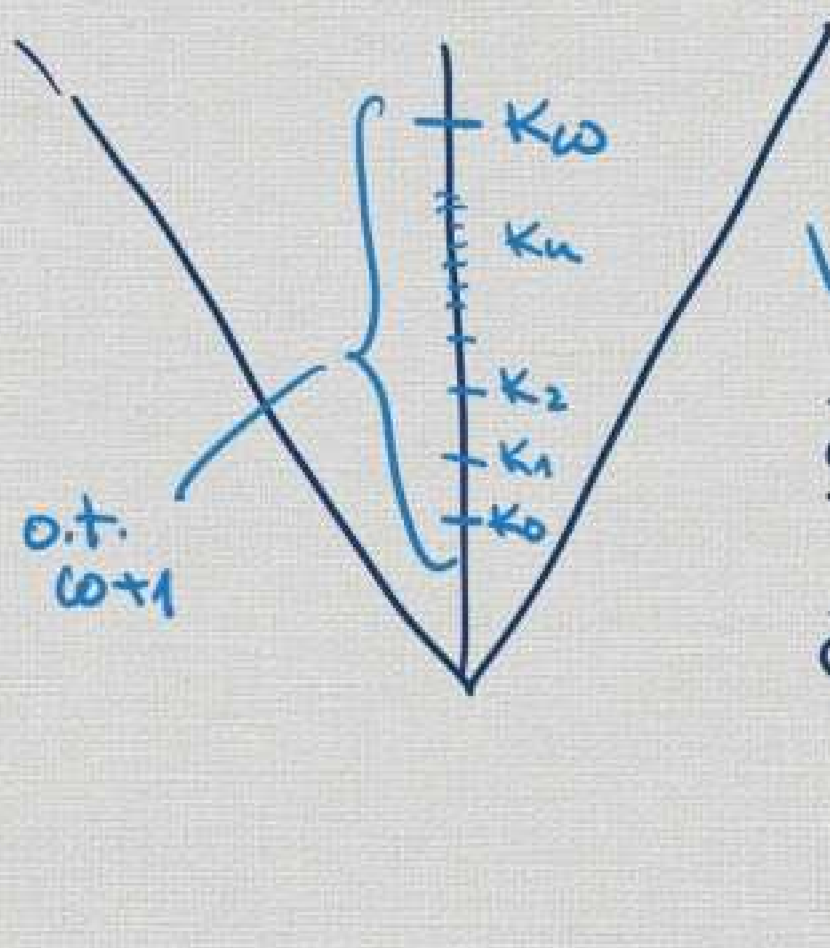
$$\Phi_{\omega I} \longrightarrow \mathrm{Cons}(ZFC + \Phi_{nI}) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}$$

$$\Phi_{nI} <_I \Phi_{\omega I}$$

$$\Phi_{nI} <_{\mathrm{Cons}} \Phi_{\omega I}.$$

Ein Schritt mehr:

$$\Phi_{(\omega+1)I} :\Longleftrightarrow \exists f \ \mathrm{dom}(f) = \omega + 1 \wedge R_I(f)$$



Alle κ_n und κ_ω sind unerreichbar.

$$V_{\kappa_\omega} \models ZFC + \Phi_{\omega I}.$$

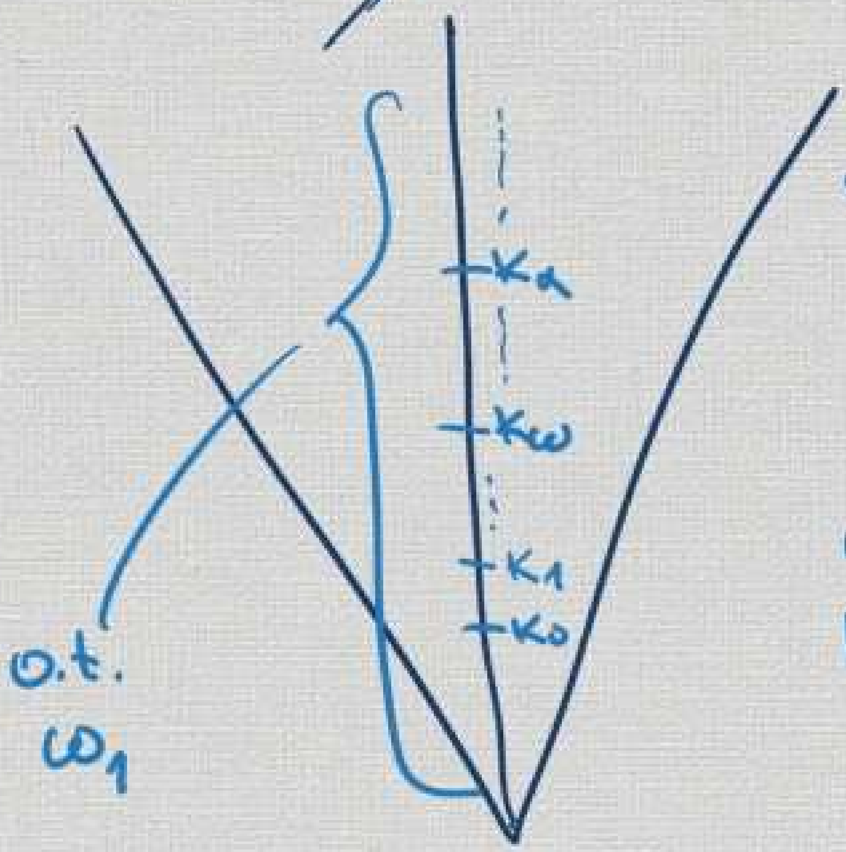
$$\Phi_{\omega I} <_I \Phi_{(\omega+1)I}$$

$$\Phi_{\omega I} <_{\mathrm{Cons}} \Phi_{(\omega+1)I}.$$

Ein großer Schritt:

„es gibt überabzählbar viele unerreichbare Kardinalzahlen"

$$\Phi_{\omega_1 I} :\Longleftrightarrow \exists f \ \underline{\mathrm{dom}(f) = \aleph_1} \wedge R_I(f).$$



Falls $\gamma < \omega_1$, so ist

$$V_{\kappa_\gamma} \models ZFC + \Phi_{?I}$$

wobei ? eine Ordinalzahl kleiner γ ist.

ACHTUNG: Wir können nicht überabzählbar viele Axiome $\Phi_{\alpha I}$ für $\alpha < \omega_1$ haben!

Die Ausdrücke $\mathrm{dom}(f) = \omega$, $\mathrm{dom}(f) = \omega + 1$, $\mathrm{dom}(f) = \aleph_1$ in den Axiomen $\Phi_{\omega I}$, $\Phi_{(\omega+1) I}$, $\Phi_{\omega_1 I}$ sind Platzhalter für entsprechende Formeln in $\mathcal{L}_\in$ [Sprache der ML], welche diese Ordinalzahlen eindeutig beschreiben.

Also machen wir dies nochmals etwas genauer:

<u>Def.</u> Eine Formel t heiße BESCHREIBUNG EINER ABZÄHLBAREN ORDINALZAHL (BAO) falls

$$ZFC \vdash \left[\exists! x\, t(x) \wedge \forall y\ t(y) \longrightarrow y \text{ ist eine abzählbare Ordinalzahl} \right]$$

<u>Bsp.</u> x ist Ordinalzahl $\wedge\ \forall y, A$
$(A \subsetneq y \longrightarrow$ ex. keine Bij. $A \longrightarrow y)$

$\wedge$ (ex. $B \subsetneq x$ und $f: B \longrightarrow x$ Bijektion.)

BESCHREIBT ω.

Wir finden ähnliche Beschreibungen für

$\omega+1, \omega+2, \omega+n, \omega\cdot 2, \omega\cdot 3, \omega\cdot n,$

AXIOM $\omega^2, \omega^3, \omega^\omega, (\omega^\omega)^\omega, \omega^{(\omega^\omega)}$

$\Phi_{t I} :\Longleftrightarrow \exists f \exists \alpha\ \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge t(\alpha) \wedge R_I(f)$

Dies reicht immer noch nicht, weil unsere BAOs eigenartige Beschreibungen sein könnten.

Bsp. Seien o_2 und o_3 die Standard-beschreibungen von $\omega\cdot 2$ und $\omega\cdot 3$

Also $\alpha = \omega\cdot 2 \longleftrightarrow o_2(\alpha)$

$\alpha = \omega\cdot 3 \longleftrightarrow o_3(\alpha)$

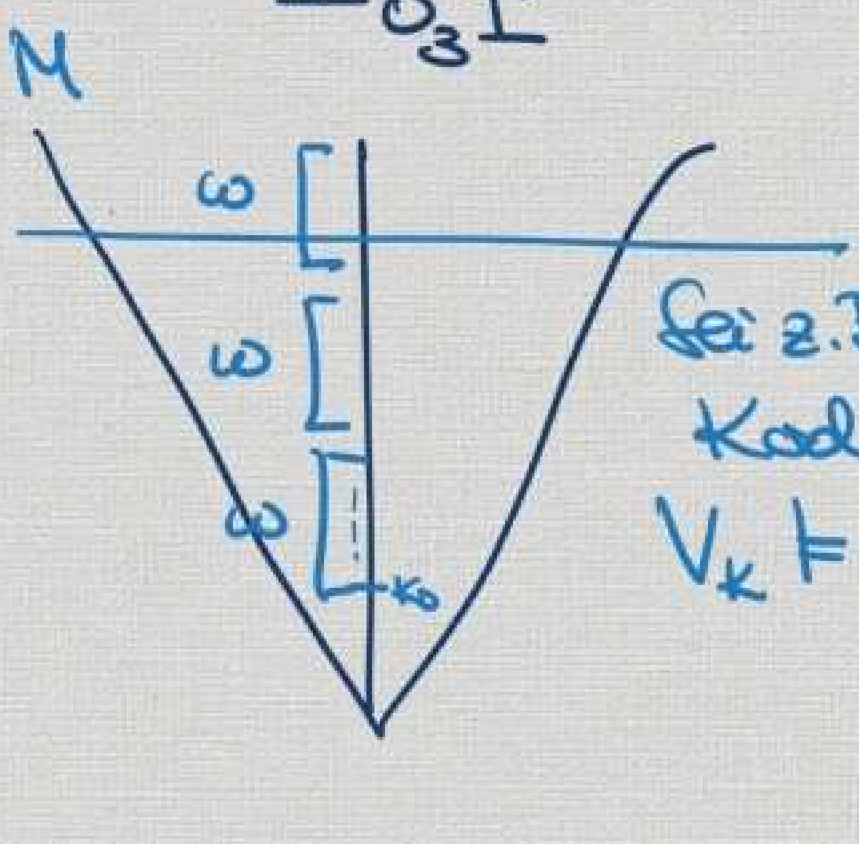
$$t(\alpha) :\Longleftrightarrow \left(\underline{\Phi}_{o_3 I} \longrightarrow o_2(\alpha)\right) \vee \left(\neg\underline{\Phi}_{o_3 I} \longrightarrow o_3(\alpha)\right)$$

Dies ist eine BAO.

Was ist dann das Axiom $\underline{\Phi}_{tI}$?

$$\underline{\Phi}_{o_3 I} \longrightarrow \underline{\Phi}_{tI}$$

gefühlt ist dies im Moment $\underline{\Phi}_{o_2 I}$



Sei z.B. κ die $\omega\cdot 2$-te unerreichbare Kard. in M, also

$$V_\kappa \models \neg\underline{\Phi}_{o_3 I} \Longrightarrow V_\kappa \models \neg\underline{\Phi}_{tI}$$

Def. Eine BAO heißt ABSOLUT FÜR TRANSITIVE MODELLE falls:
wenn M, N transitive Mengen und $N \subseteq M$, dann

$$(N, \in) \models t(\alpha) \longleftrightarrow (M, \in) \models t(\alpha).$$

Wir schreiben ABAO dafür.

Zusammenfassend erhalten wir also:

KOROLLAR Falls t, t' ABAOs sind und $ZFC \vdash t(\alpha) \wedge t'(\beta) \longrightarrow \alpha < \beta$ so gilt $\Phi_{tI} <_{Cons} \Phi_{t'I}$.

und $\Phi_{tI} <_I \Phi_{t'I}$.

$$\Phi_{\infty I} :\Longleftrightarrow \forall \alpha \exists \beta > \alpha \; C_I(\beta)$$

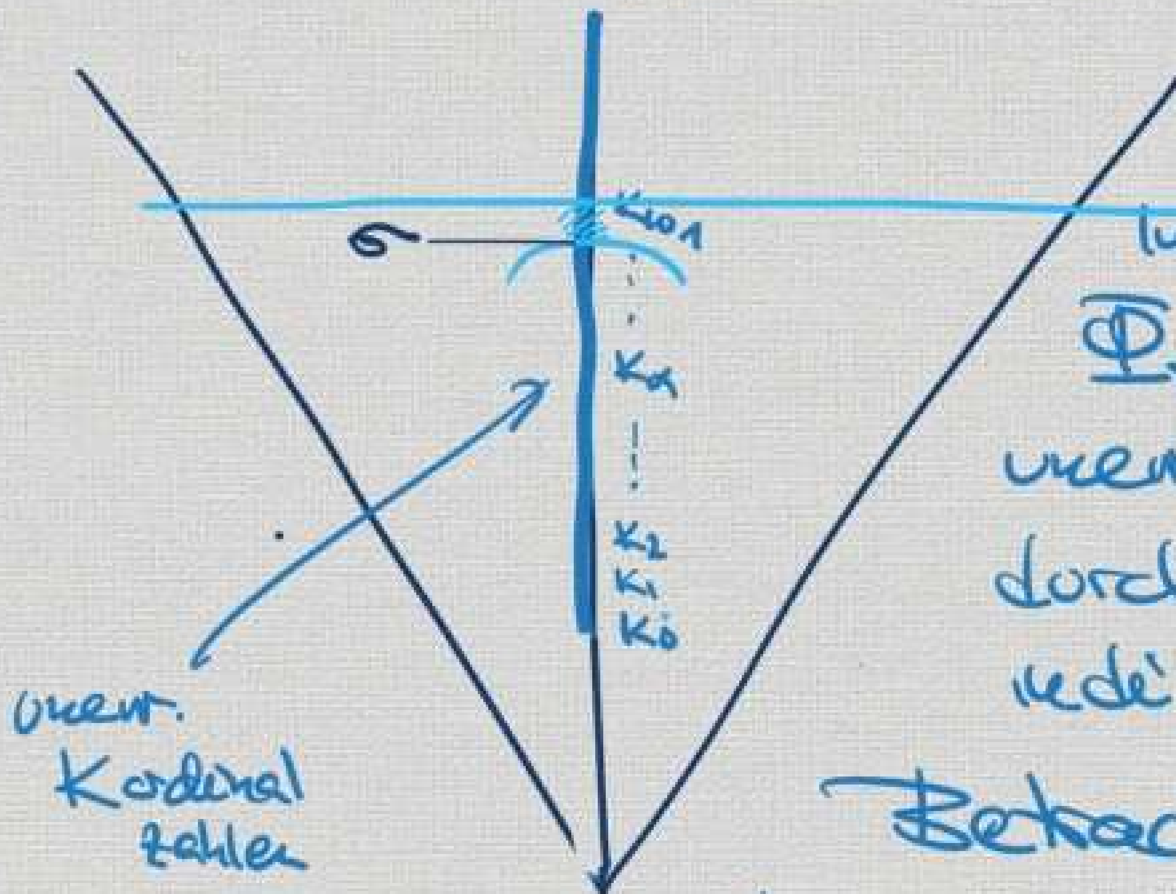
"es gibt unbeschränkt viele unerreichbare Kardinalzahlen"

Mit dem gleichen Argument wie vorher erhalten wir, daß für jedes ABAO t

$$\Phi_{tI} <_{Cons} \Phi_{\infty I}.$$

Es gilt auch

$$\Phi_{\omega_1 I} <_{Cons} \Phi_{\infty I} .$$



In einem Modell von $\Phi_{\infty I}$ kann ich die unerreichbaren Kard. durch Ordinalzahlen indizieren.

Betrachte nun κ_{ω_1}, die ω_1-ste unerr. Kardinalzahl

$V_{\kappa_{\omega_1}} \models ZFC$.

Betrachte nun die aufsteigende Abfz.

$f: \underline{\omega_1} \longrightarrow \kappa_{\omega_1}$ mit

$f(\alpha) = \kappa_\alpha$

Da $|\{\kappa_\alpha ; \alpha < \omega_1\}| = \aleph_1$, ist diese Menge beschränkt unter κ_{ω_1} [da κ_{ω_1} regulär].

Sei $\sigma := \bigcup \{\kappa_\alpha ; \alpha < \omega_1\} < \kappa_{\omega_1}$.

Also: $f : \omega_1 \longrightarrow \sigma$; d.h. $f \in V_{\sigma+2} \subseteq V_{\kappa_{\omega_1}}$

Außerdem:

$V_{\omega+1} \subseteq V_{\kappa_{\omega_1}}$, d.h. jede Wohlordnung von $\mathbb{N}$ liegt in $V_{\kappa_{\omega_1}}$.

Falls also $\alpha < \omega_1$, so gilt

$$V_{\kappa_{\omega_1}} \models \alpha \text{ ist abzählbar.}$$

Zusammen $V_{\kappa_{\omega_1}} \models \Phi_{\omega_1 I}$.

IST ALSO $\Phi_{\infty I}$ DAS STÄRKSTE UNERREICHBARKEITSAXIOM?

Nein

unerreichbare Limes von Unerreichbaren

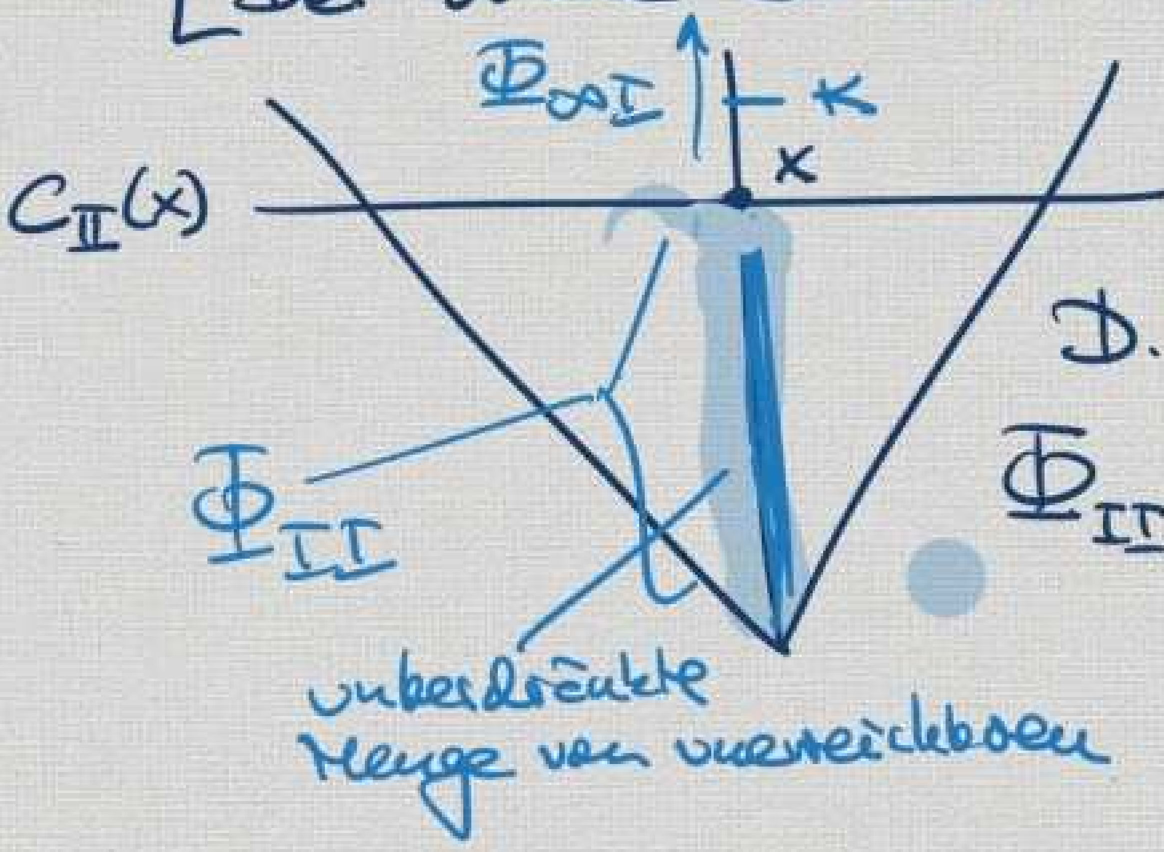
$$C_{II}(x) :\Longleftrightarrow C_I(x) \wedge \forall \alpha < x \; \exists \lambda \; (\alpha < \lambda < x \wedge C_I(\lambda))$$

Was ist das Verhältnis zwischen

$$\Phi_{II} \;\&\; \Phi_{\infty I} \;?$$

Bek 1 $\Phi_{\infty I} \not\rightarrow \Phi_{II}$

[Der übliche Beweis:



$V_x \models \overline{\Phi}_{\infty I}$

D.h.

$\overline{\Phi}_{II} \Rightarrow \mathrm{Cons}(ZFC + \overline{\Phi}_{\infty I})$

$\overline{\Phi}_{\infty I} <_{\mathrm{Cons}} \overline{\Phi}_{II}$]

Beh. 2 Auch: $\overline{\Phi}_{II} \not\Rightarrow \overline{\Phi}_{\infty I}$.

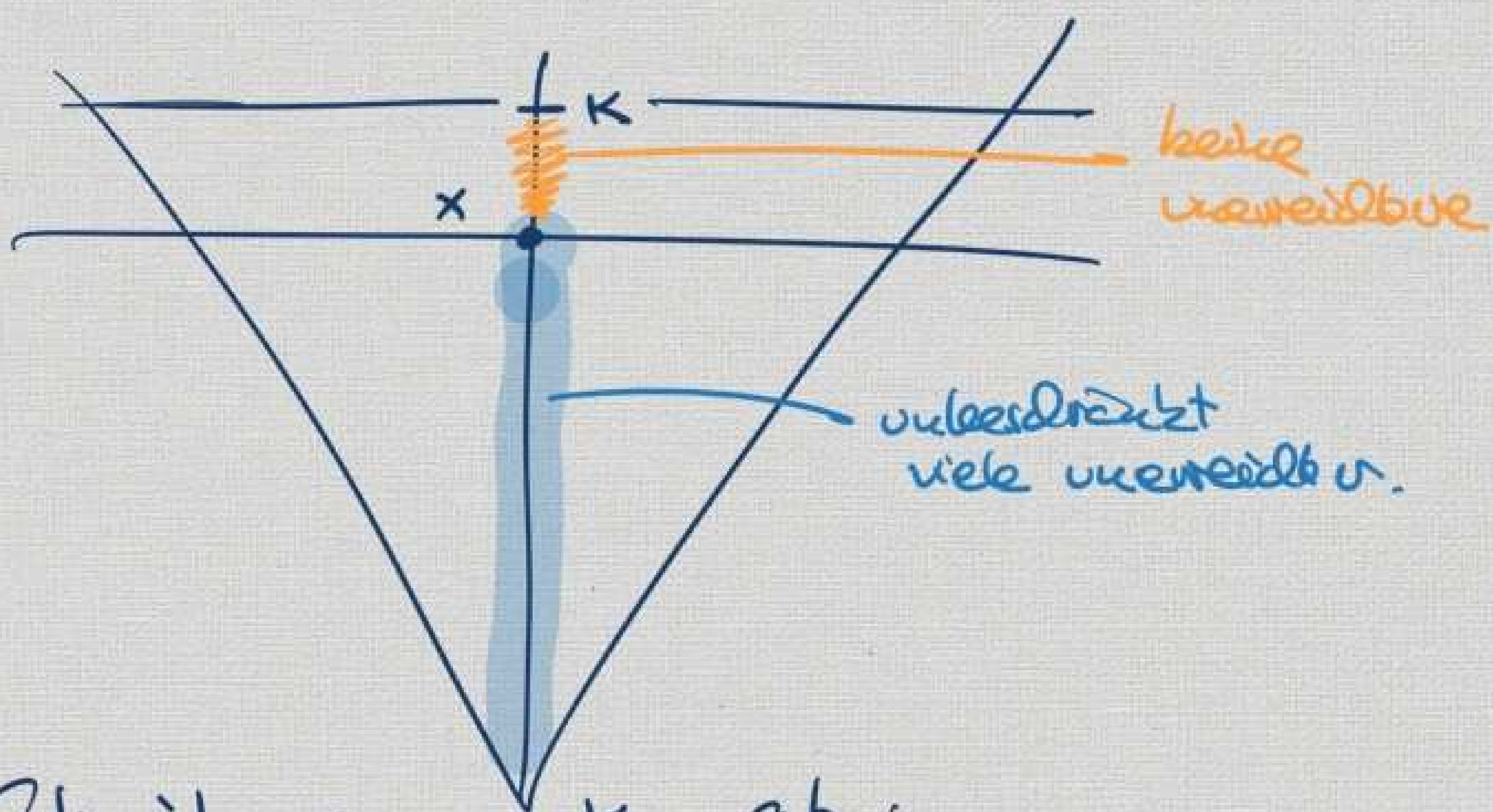
Also: $\overline{\Phi}_{\infty I} \not\leq_I \overline{\Phi}_{II}$.

D.h. $\overline{\Phi}_{\infty I}, \overline{\Phi}_{II}$ bzgl. $\leq_I$-Ordnung nicht vergleichbar sind.

[Ang. $\overline{\Phi}_{II} \Rightarrow \overline{\Phi}_{\infty I}$

Finde in einem Modell von $\overline{\Phi}_{II}$ mit $C_{II}(x)$ ein $\kappa > x$ mit $C_I(\kappa)$.

Finde κ minimal: d.h. $\forall \alpha$ mit $x < \alpha < \kappa$ gilt $\neg C_I(\alpha)$.



Schneide an κ ab:

$V_\kappa \models C_{II}(x) \wedge$ x ist die größte unerreichbare Kard.

$\Longrightarrow V_\kappa \models \Phi_{II} \wedge \neg \Phi_{\infty I}$.

Widerspruch!]

$\Phi_{II} >_{Cons} \Phi_{\infty I}$

$\Phi_{II} \not< \Phi_{\infty I}$ nicht vergleichbar bzgl. $<_I$.

Wo liegen die meßbaren in dieser Hierarchie?

Wir wissen bereits:

(1) κ meßbar $\Longrightarrow$ κ unerreichbar

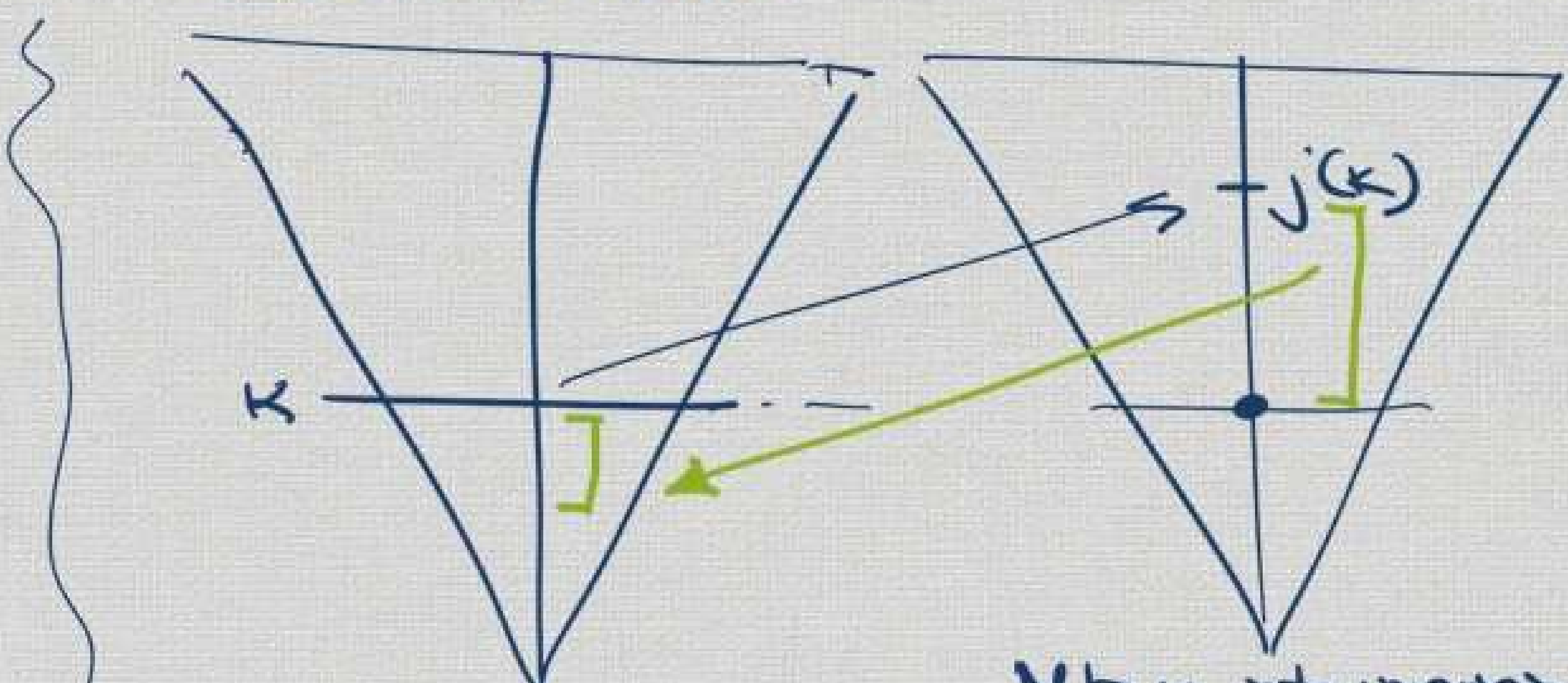
$C_M(x) :\Longleftrightarrow x$ ist meßbar

$$\boxed{\Phi_I \leq_I \Phi_M}$$

(2) κ meßbar $\Longrightarrow \exists \lambda < \kappa \; C_I(\lambda)$

[Wie hatten wir das gezeigt?

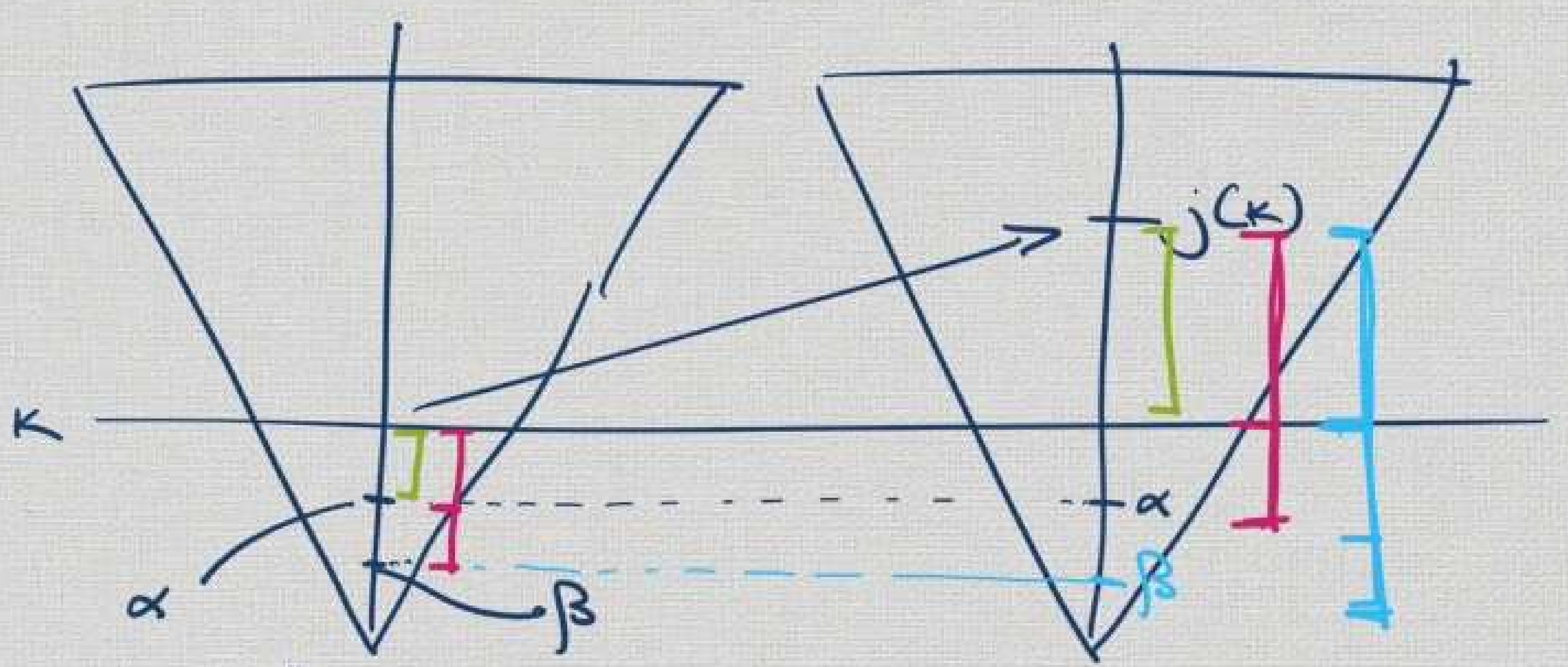
REFLEKTION



$M \models \kappa$ ist unerreichbar

$\mathcal{V} \models \exists \alpha < \kappa$ [α ist unerreichbar] $\longleftarrow$ $M \models \exists \alpha < j(\kappa)$ [α ist unerreichbar]

$\Longrightarrow C_M(x) \longrightarrow C_{2I}(x) \Longrightarrow \Phi_I <_{Cons} \Phi_M$



Wir hatten

$V \models \alpha<\kappa$, α unerr. $\Longrightarrow$ $M \models \alpha$ unerreichbar.

$M \models \exists x \exists y \; x<y<j(\kappa)$
x, y unerreichbar.

$V \models \exists x,y$
$x<y<\kappa$
x,y unerreichbar

REFLEKTION

D.h. $C_M(\kappa) \Longrightarrow C_{2I}(\kappa)$

<u>Theorem</u> Falls $C_M(\kappa) \Longrightarrow C_{II}(\kappa)$.

<u>Beweis.</u> Es ist zu zeigen, daß unterhalb von κ unbeschränkt viele unerreichbare Kardinalzahlen liegen.

z.z. $V \models \forall \alpha<\kappa \; \exists \beta \; \alpha<\beta<\kappa \; C_I(\beta)$.

z.z.

$$\mathcal{V} \models \forall \alpha < \kappa \; \exists \beta \; \alpha < \beta < \kappa \wedge C_I(\beta)$$

$$\left[\mathcal{M} \models \forall \alpha < j(\kappa) \; \exists \beta \; \alpha < \beta < j(\kappa) \wedge C_I(\beta) \right]$$

Dies bekommen wir nicht so einfach.

Fixiere stattdessen $\underline{\alpha < \kappa}$. Dann gilt

$$\mathcal{M} \models \exists \beta \; \alpha < \beta < j(\kappa) \wedge C_I(\beta).$$

[Warum? $\beta = \kappa$]

$$\Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \exists \beta \; j(\alpha) < \beta < j(\kappa) \wedge C_I(\beta)$$

$$\overset{\text{Ele-}}{\underset{\text{mentarität}}{\Longleftrightarrow}} \mathcal{V} \models \exists \beta \; \alpha < \beta < \kappa \wedge C_I(\beta).$$

Und das ist genau das, was wir zeigen wollten, da α beliebig war.

q.e.d.