MODELLE DER MENGENLEHRE

WS 2020/21

VORLESUNG XII

2. Februar 2021

§12 (Fortsetzung)

Der Hauptsatz über meßbare Kardinalzahlen

λ ist unerreichbar

$V_\lambda \models ZFC$

$\mathcal{V} := (V_\lambda, \in)$

$\kappa < \lambda$ meßbar mit Uf. U

$M \subseteq V_\lambda$ Mostowski-Kollaps von $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$

KLAUSUR

$\boxed{\begin{array}{l}\text{23. FEBRUAR 2021}\\ 11^{30} - 13^{30}\end{array}}$

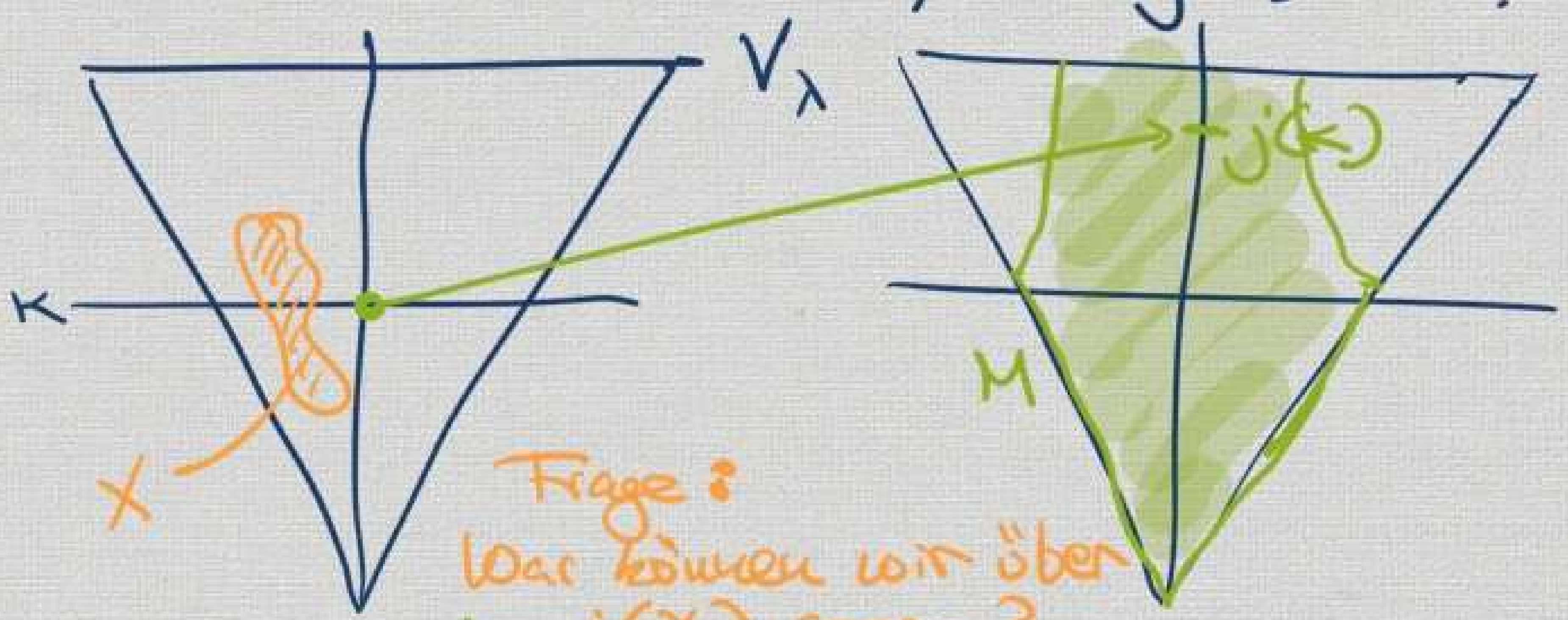
"open book timed written exam"

MOODLE

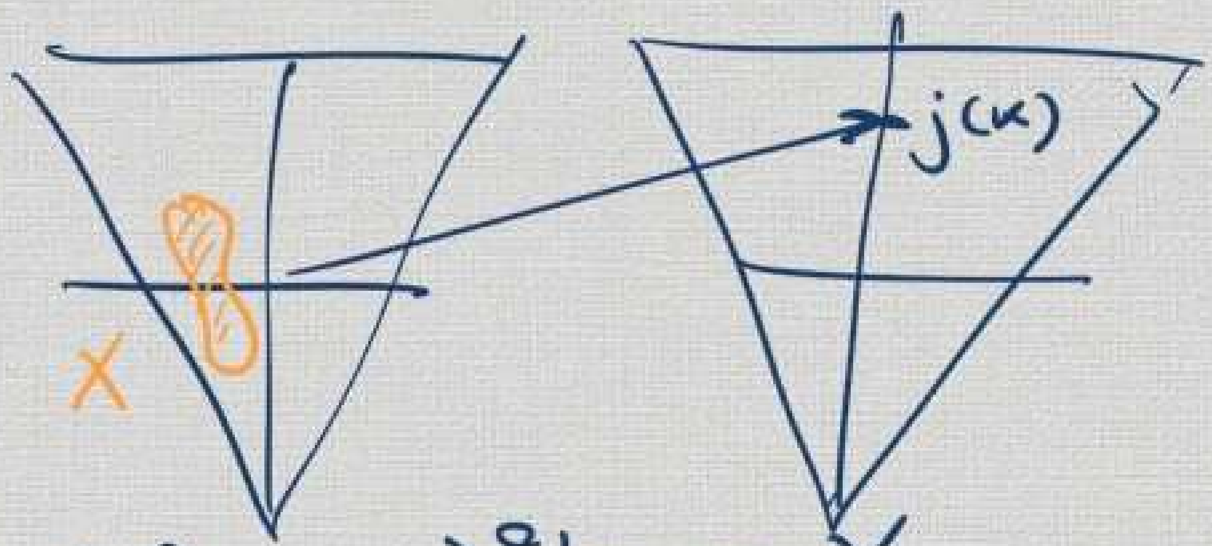
$\mathfrak{M} := (M, \in)$; $j(x) := [c_x]$

$j \upharpoonright V_\kappa = \mathrm{id} \upharpoonright V_\kappa$; $V_{\kappa+1} \subseteq M$

κ ist der kritische Punkt von j, d.h. die kleinste Ord.z. α, s.d. $j(\alpha) > \alpha$.



Frage:
Was können wir über $j(X)$ sagen?



$j(X)$? $\quad V \models x \in X$

$\Longrightarrow M \models j(x) \in j(X)$

$$\boxed{\{j(x) ; x \in X\} \subseteq j(X)}$$

(*) gilt immer

Gleichheit? NEIN

Falls $X \subseteq Y$, so $j(X) \subseteq j(Y)$.

$$j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$$

[wg. Elementarität]

$$j(X \cup Y) = j(X) \cup j(Y)$$

$$j(X \setminus Y) = j(X) \setminus j(Y)$$

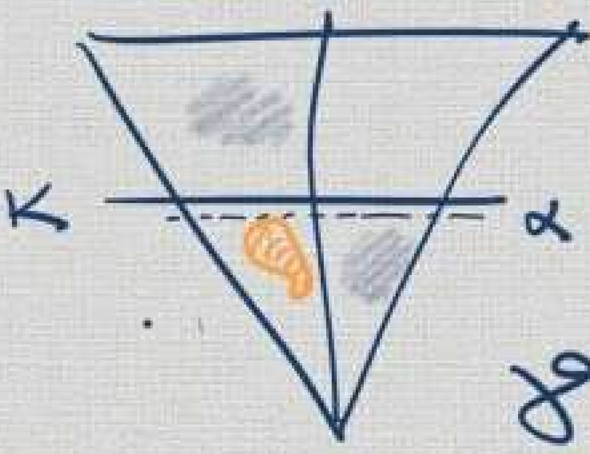
Bsp. für Ungleichheit in (*):

$X = \kappa$

$$\{j(x) ; x \in \kappa\} = \{x ; x \in \kappa\} = \kappa < j(\kappa)$$

Im allgemeinen kann $j(X) \supsetneq \{j(x) ; x \in X\}$ sein.

<u>Fall 1</u> $X \subseteq V_\kappa$ und X ist durch α beschränkt:



$$X \subseteq V_\alpha \qquad \frac{\alpha < \kappa}{V_\alpha \in V_\kappa}$$

$$\mathcal{V} \models \forall x \, (x \in X \longrightarrow x \in V_\alpha)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{M} \models \forall x \, (x \in j(X) \longrightarrow x \in \underset{\substack{\shortparallel \\ V_\alpha}}{j(V_\alpha)})$$

$$\Longrightarrow j(X) \subseteq V_\alpha$$

$$\Longrightarrow j(X) = X.$$

<u>Fall 2</u> $X \not\subseteq V_\kappa$, aber $|X| < \kappa$.

Dann ex. $\boxed{\alpha < \kappa}$ und Bij. $f : \alpha \longrightarrow X$

$$\mathcal{V} \models \mathrm{ran}(f) = X \Longrightarrow \mathcal{M} \models \mathrm{ran}(j(f)) = j(X)$$

$$\mathcal{V} \models \mathrm{dom}(f) = \alpha \Longrightarrow \mathcal{M} \models \mathrm{dom}(j(f)) = \underset{\substack{\shortparallel \\ \alpha}}{j(\alpha)}$$

Falls $\beta < \alpha$, $x \in X$

$$\mathcal{V} \models f(\beta) = x \Longrightarrow \qquad [\text{da } \alpha < \kappa]$$

$$\mathcal{M} \models j(f)(\underbrace{j(\beta)}_{=\beta}) = j(x)$$

$j(f) : \alpha \longrightarrow j(X)$
mit $j(f)(\beta) = j(f(\beta))$

$$\Longrightarrow \mathcal{M} \models j(f)(\beta) = j(x)$$

D.h. $j(f)$ ist Bijektion zw. α und $j(X)$ und enthält genau die $j(x)$ mit $x \in X$:

$$\{j(x);\, x \in X\} = j(X).$$

<u>Fall 3</u> z.B. $|X| = \kappa$.

Dann gilt $\mathcal{V} \models |X| = \kappa$

$$\Longrightarrow \mathfrak{M} \models |j(X)| = j(\kappa)$$

Insbesondere gilt:

$$\underset{\text{Kard. } \kappa}{\{j(x);\, x \in X\}} \subsetneqq \underset{\substack{\text{Kard.} \\ j(\kappa) > \kappa}}{j(X)}$$

HAUPTSATZ ÜBER MESSBARE KARDINALZAHLEN

Sei λ unerreichbar, $\kappa < \lambda$.

Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{V} \models \kappa$ ist meßbar

(ii) es ex. $M \subseteq V_\lambda$ transitiv und $j : V_\lambda \longrightarrow M$ elementar zw. $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ mit kritischem Punkt κ.

<u>Bem.</u> In der Literatur meist ohne unerreichbare λ. Dann sind M und j keine Mengen, sondern echte Klassen und somit ist (ii) kein Satz der Sprache $\mathcal{L}_\in$. Dies müßte man eigentlich in einer geeigneten Klassentheorie "

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii). Das ist genau das, was wir in VL $\underline{\overline{\text{XI}}}$ gemacht haben.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $M \subseteq V_\lambda$ transitiv, $j : V_\lambda \longrightarrow M$ elementar mit $\kappa < j(\kappa)$ und $j \upharpoonright \kappa = \mathrm{id} \upharpoonright \kappa$.

Betrachte j auf $\mathcal{P}(\kappa)$: falls $X \subseteq \alpha < \kappa$, so ist $j(X) = X$; andernfalls, falls $|X| = \kappa$, so ist $|j(X)| = j(\kappa)$ und $X \subseteq j(X)$

Es ist möglich, daß $\kappa \in j(X)$.

Definiere

$$X \in U :\Longleftrightarrow X \subseteq \kappa \text{ und } \kappa \in j(X)$$

Behauptung: U ist κ-vollständiger freier Uf. auf κ.

Eigenschaften
- $\emptyset = j(\emptyset)$, also $\kappa \notin j(\emptyset)$ $\Longrightarrow \emptyset \notin U$. ✓
- $\kappa \in j(\kappa)$, also $\kappa \in U$. ✓
- $X, Y \in U \Longrightarrow \kappa \in j(X)$ und $\kappa \in j(Y)$
  $\Longrightarrow \kappa \in j(X) \cap j(Y)$
  $\Longrightarrow \kappa \in j(X \cap Y)$
  $\Longrightarrow X \cap Y \in U$.

• $X \in U, Y \supseteq X$

$\kappa \in j(X) \subseteq j(Y) \Longrightarrow Y \in U$

FILTER

• $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$

D.h. $j(\kappa) = j(\kappa \setminus X) \cup j(X)$

$\Longrightarrow \kappa \in j(\kappa \setminus X)$ oder $\kappa \in j(X)$.

ULTRA

• Falls $X = \{\alpha\}$, dann $j(X) = \{j(\alpha)\}$
$= \{\alpha\}$

$\alpha \in \kappa$

$\Longrightarrow \kappa \notin j(X) \Longrightarrow \{\alpha\} \notin U$.

FREI

Bleibt κ-vollständig: Sei $\{X_\alpha ; \alpha < \gamma\}, \gamma < \kappa$
eine Menge von Mengen in U:

$\forall \alpha \quad X_\alpha \in U \Longleftrightarrow \kappa \in j(X_\alpha)$. (*)

Z.z. $X := \bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha \in U \Longleftrightarrow \kappa \in j(X)$.

Aus (*) folgt. $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \gamma} j(X_\alpha)$

Betrachte Fkt. $\Xi : \gamma \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$

mit $\Xi(\alpha) := X_\alpha$

$\mathcal{V} \models \Xi$ ist Funktion mit $\mathrm{dom}(\Xi) = \gamma$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models j(\Xi)$ ist Funktion mit $\mathrm{dom}(j(\Xi)) = j(\gamma) = \gamma$

$\forall \alpha < \gamma \quad \mathcal{V} \models \Xi(\alpha) = X_\alpha \Longrightarrow \mathcal{M} \models j(\Xi)(\alpha) = j(X_\alpha)$

X ist der Schnitt der Bilder von Ξ,

also $\bigcap_{\alpha<\gamma} \Xi(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha = X$

Wg. Elementarität ist $j(X)$ der Schnitt der Bilder von $j(\Xi)$

also $\bigcap_{\alpha<\gamma} j(\Xi(\alpha)) = \bigcap_{\alpha<\gamma} j(X_\alpha)$

Nach Ann. hatten wir

$$\kappa \in \bigcap_{\alpha<\gamma} j(X_\alpha) = j(X)$$

Also ist $X \in U$.

κ- Vollständigkeit.

q.e.d.

<u>Bem.</u> Die Formulierung (ii), also die modelltheoretische Charakterisierung von Meßbarkeit führte dann zu einem paradigmatischen Ansatz für immer größere Kardinalzahlen.

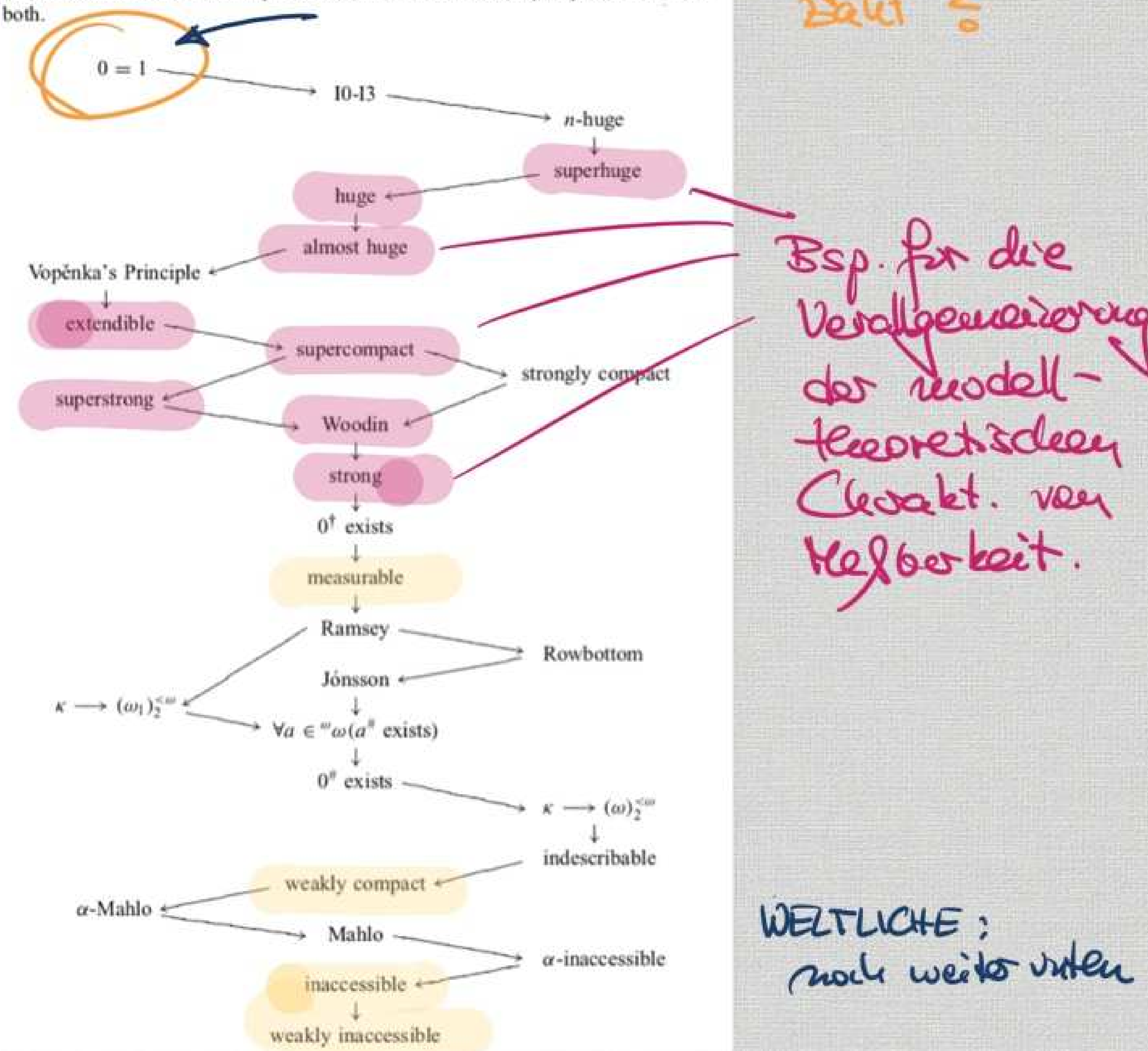
§13 Große Kardinalzahlaxiome

aus:

Akihiro KANAMORI, The Higher Infinite, S. 472

Chart of Cardinals

The arrows indicates direct implications or relative consistency implications, often both.



Frage

Was ist eigentlich eine große Kardinalzahl?

WELTLICHE:
noch weiter unten

Pseudodefinition Ein GROSSER KARDINALZAHLBEGRIFF ist eine NATÜRLICHE Formel C mit

① $ZFC \vdash C(x) \longrightarrow x$ ist eine überabz. Kardinalzahl

② $ZFC \nvdash \underbrace{\exists x\, C(x)}$

GROSSE KARDINALZAHLAXIOM

Problem Dies liefert u.a. Unfug:
Sei φ ein Satz mit $ZFC \nvdash \varphi$ und $ZFC \nvdash \neg\varphi$.

$C(x) :=$ "$x = \aleph_1 \wedge \varphi$"

Also: ② ist zu schwach.

Daher 2^* $ZFC + \exists x\, C(x) \vdash Cons(ZFC)$

Problem Funktioniert immer noch nicht:

$C(x) :=$ "$x = \aleph_1 \wedge Cons(ZFC)$".

Bemerkung $C(x) := 0 = 1$
erfüllt sowohl ①, ②, als auch 2^*.
Also ist $0=1$ ein (eigenartiges) großes Kardinalzahlaxiom.

Joel David Hamkins
@JDHamkins

My view is that there is ultimately no coherent concept of what counts as natural, and we may legitimately dismiss concerns about naturality as easily as they are raised, which is to say, effortlessly. Naturality talk is too often used simply to reject the unfamiliar. For someone to declare a construction or idea "unnatural" is little different from them simply saying, "I don't like it." In my experience, the rejection of "unnatural" solutions often indicates that a question simply was not well formulated, for the actual objection is something else—the solution lacked a certain expected feature or exhibited a certain unexpected feature. A better formulation of the question would have clarified what was actually desired.

Twitter
1. Februar 2021

Was bedeutet Kanamoris Diagramm?

C_1, C_2 große Kardinalzahlbegriffe

$$C_1 \leq_I C_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad C_2(x) \Longrightarrow C_1(x)$$

$\uparrow$ IMPLIKATION

$$C_1 <_I C_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad C_1 \leq_I C_2 \text{ und } C_2 \not\leq_I C_1$$

Bsp. XI

MESSBAR
$\Downarrow$ ($\not\Uparrow$)
UNERREICHBAR
$\Downarrow$ ($\not\Uparrow$)
WELTLICH

[SCHWACH KOMPAKT werden in den verbleibenden VLen betrachtet]

Sagen wir

$C_M(x) :=$ "x ist meßbar"

$C_I(x) :=$ "x ist stark unerreichbar"

INACCESSIBLE

$C_W(x) :=$ "x ist weltlich"

$$\boxed{C_M >_I C_I >_I C_W}.$$

Zweite Vergleichsmöglichkeit.

$C_1 <_G C_2 :\Longleftrightarrow$ die kleinste C_1-Zahl ist strikt kleiner als die kleinste C_2-Zahl.

$$\boxed{C_M >_G C_I >_G C_W}$$

[Reflektionsargument VL $\underline{XI}$] [Verallgem. Skolemhülle]

Es ist nicht offensichtlich, daß für je zwei Begriffe C_1, C_2 die Ordnungen $<_I$ und $<_G$ das gleiche Ergebnis geben.

Dritte Vergleichsmöglichkeit:

$$C_1 <_{\mathrm{Cons}} C_2 \;:\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{ZFC} + \exists x\, C_2(x) \vdash \mathrm{Cons}(\mathrm{ZFC} + \exists x\, C_1(x))$$

$$C_M >_{\mathrm{Cons}} C_I >_{\mathrm{Cons}} C_W.$$

Wir sehen: für C_M, C_I, C_W geben diese drei die gleichen Antworten und dies ist auch der Fall bei den meisten NATÜRLICHEN Axiomen.

Gegenbeispiele gibt es insbesondere bei $<_G$.

Es ist möglich, C_1, C_2 mit

$$C_1 <_{\mathrm{Cons}} C_2,$$ aber

wir haben Modell $\mathfrak{M} \models$ die kleinste C_1-Zahl ist die kleinste C_2-Zahl.

Phänomen: IDENTITÄTSKRISE.

Sehen wir uns einige einfache Varianten unserer Axiome C_M, C_I, C_W an:

C_{2I} : "κ ist mindestens die zweite unerreichbare"

$$\boxed{C_I(x) \wedge \exists y < x \; C_I(y)}$$

$$C_I <_I C_{2I} <_I C_{3I} < \dots < C_{nI}$$

$$C_I <_G C_{2I} <_I C_{3I} < \dots < C_{nI}$$

$$C_{3I} : \boxed{C_I(x) \wedge \exists y < z < x \; C_I(y) \wedge C_I(z)}$$

$$C_I <_{Cons} C_{2I} <_{Cons} C_{3I} \; \dots$$

- $\Phi_{\infty I} := \forall \alpha \, \exists \beta > \alpha \; C_I(\beta)$

"es unbeschränkt viele unerreichbare Kardinalzahlen"

$$C_{\infty I}^{(x)} := C_I(x) \wedge \forall \alpha < x \, \exists \beta \;\; \alpha < \beta < x \;\; C_I(\beta)$$

$\exists x \, C_{\infty I}(x)$

BEMERKUNG

Frage zu $j \longmapsto U_j$ Operation gemäß (ii) ⇒ (i) des Hauptsatzes

$U \longmapsto j_U$ Operation gemäß (i) ⇒ (ii) des Hauptsatzes

$$? \quad j_{U_j} \,/\, U_{j_U} \quad ?$$

$$j_{U_j} = j \quad ? \quad U_{j_U} = U.$$

Antwort: Es ex. j, so daß $j_{U_j} \neq j$.

GA #12 : $\forall U \quad j_U : V_\lambda \longrightarrow M$

$$V_{\kappa+2} \not\subseteq M$$

Aber es gibt ggf. $j : V \longrightarrow M$ 2-stark

mit $V_{\kappa+2} \subseteq M$ [siehe Kanamori-Bild]

–