MODELLE DER MENGENLEHRE

WS 2020/21
26. Januar 2021

VORLESUNG XI

Erinnerung

- U Ultrafilter auf I
- U $\aleph_1$-vollständig $\Longrightarrow$ $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$ ist fundiert, $\mathcal{V} = (V_\lambda, \in)$
- MOSTOWSKI $\Longrightarrow$ $\cong (M, \in)$ mit M transitiv.
- z.B. $[c_\omega]$ ist wirklich ω in M.

Wir wollen einen κ-vollst. freien Ultrafilter auf einer Menge I mit $|I| = \kappa$

$$[\text{oBdA } I = \kappa].$$

$\leftrightsquigarrow$ MESSBARE KARDINALZAHLEN

[Herr Wansner:
κ meßbar $\Longrightarrow$ κ stark unerreichbar]

§ 12 Der Hauptsatz über meßbare Kardinalzahlen

Situation λ stark unerreichbar

$$\mathcal{V} := (V_\lambda, \in) \models \mathrm{ZFC}$$

$\kappa < \lambda$ meßbar

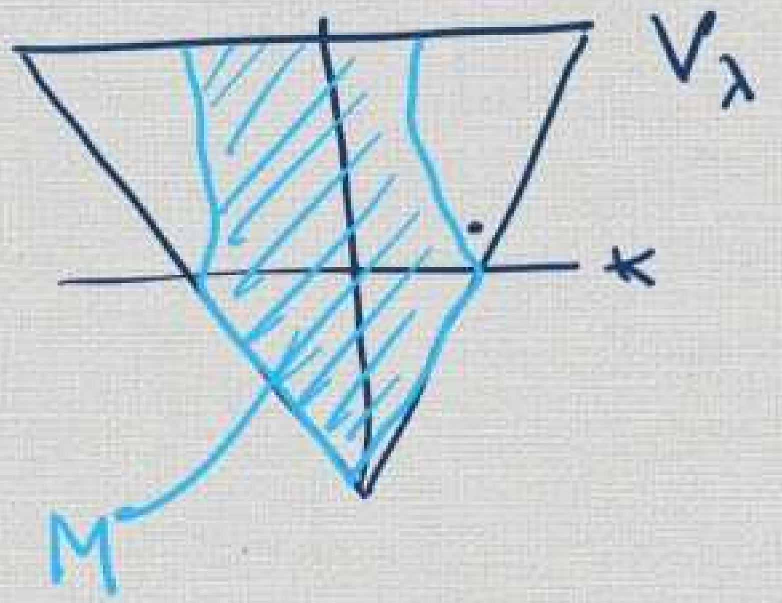
mit U κ-vollständiger freier Ultrafilter auf κ. $\searrow$ insbes. $\aleph_1$-vollständig

$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$ ist fundiert; also mit Mostowski ex. ein $M \subseteq V_\lambda$ [letztes Mal gezeigt]

mit $\mathcal{M} = (M, \in) \cong \mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$.

DEF. In dieser Situation nennen wir $\mathcal{M}$ ein inneres Modell von $\mathcal{V}$.

1. $M \subseteq V_\lambda$
2. $(M, \in) \models \mathrm{ZFC}$
3. $\lambda \subseteq M$.



Eigenschaften von inneren Modellen $\mathcal{M}$ in $\mathcal{V}$:

1. Falls $\mathcal{V} \models \mu$ ist eine Kardinalzahl, so ist $\mathcal{M} \models \mu$ ist eine Kardinalzahl.

[Ang. $\mathcal{M} \models \mu$ ist keine Kard. Dann ex. $\delta < \mu$ und $f : \delta \longrightarrow \mu$ mit f ist Bijektion. $f \in M \subseteq V_\lambda$

Also gilt $\mathcal{V} \models \mu$ ist keine Kard.]

(2) Falls $\mathfrak{M} \models cf(\mu) \leq \nu$, so gilt
dies auch in $\mathcal{V}$.

[$\mathfrak{M} \models cf(\mu) \leq \nu$ heißt
in M ex. $f: \nu \longrightarrow \mu$ konfinal.
$M \subseteq V_\lambda$]

(3) Falls $\mathfrak{M} \models \mu$ ist singulär, so
$\mathcal{V} \models \mu$ ist singulär;
falls $\mathcal{V} \models \mu$ ist regulär, so
$\mathfrak{M} \models \mu$ ist regulär.

(4) Falls $V_{\kappa+1} \subseteq M$ und
$\mathfrak{M} \models \kappa$ ist Kardinalzahl,
so $\mathcal{V} \models \kappa$ ist Kardinalzahl.

[Ang. nicht: in V_λ ex. $f: \delta \longrightarrow \kappa$ Bijektion
Aber $f \subseteq V_\kappa$, also $f \in V_{\kappa+1} \subseteq M$.
Widerspruch zur Ann. daß $\mathfrak{M} \models \kappa$ ist
Kardinalzahl.]

(5) Ebenso: Falls $V_{\kappa+1} \subseteq M$ und
$\mathfrak{M} \models \kappa$ ist regulär, so
$\mathcal{V} \models \kappa$ ist regulär.

<u>Ziel</u> Finde heraus, wie M in V_λ liegt.

<u>Konvention</u> Wir identifizieren $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$ mit M und schreiben z.B. $[f]$ für das eind. bestimmte Elt. von M, welches das Bild des Mostowski-Isomorphismus ist.

Elementare Einbettung

$$x \longmapsto [c_x] =: j(x)$$

Also ist $j : V_\lambda \longrightarrow M$ eine elem. Einbettung von $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$.

<u>Lemma 1</u> $j \upharpoonright V_\kappa = \mathrm{id} \upharpoonright V_\kappa$.

<u>Beweis</u> Angenommen, wir haben ein x mit $j(x) \neq x$. Sei x ein solches Objekt mit minimalem Rang $\rho(x) = \alpha$. D.h. f.a. $z \in V_\alpha$ gilt $j(z) = z$.

$$j \upharpoonright V_\alpha = \mathrm{id} \upharpoonright V_\alpha.$$

$j(x) \neq x \qquad \rho(x) = \alpha$

$j \restriction V_\alpha = id \restriction V_\alpha$

Falls $\rho(j(x)) = \alpha$, d.h. $j(x) \subseteq V_\alpha$:
Sei nun $y \in x \longleftrightarrow j(y) \in j(x)$
$\longleftrightarrow y \in j(x)$
[für alle $y \in V_\alpha$]
Also wäre $x = j(x)$.
Widerspruch zur Annahme.

$\rho(j(x)) > \alpha$.

Es gilt natürlich
$V \models \alpha$ ist der Rang von x
$\Longrightarrow \mathfrak{M} \models j(\alpha)$ ist der Rang von $j(x)$

Zusammenfassend:

$$j(\alpha) > \alpha.$$

[Nebenbemerkung: jede elem. Abb., welche nicht die Identität ist, bewegt eine Ordinalzahl nach oben.]

Es reicht also für L1 zu zeigen:

$$\forall \alpha < \kappa \; j(\alpha) = \alpha.$$

Bek. $\forall \alpha < \kappa \quad j(\alpha) = \alpha$.

Sei $[f] \in j(\alpha) = [c_\alpha]$

Nach Łoś:

$$\{\gamma < \kappa ;\, f(\gamma) \in c_\alpha(\gamma)\}$$
$$= \{\gamma < \kappa ;\, f(\gamma) < \alpha\} \in U.$$
$$= \bigcup_{\beta < \alpha} \{\gamma < \kappa ;\, f(\gamma) = \beta\}$$

Eine Menge in U geschrieben als disjunkte Vereinigung von α vielen Mengen. $\alpha < \kappa$

Daraus folgt: es ex. $\beta < \alpha$ mit

$$\{\gamma < \kappa ;\, f(\gamma) = \beta\} \in U$$

[κ-Vollständigkeit von U]

Also dann ist $[f] = [c_\beta]$.

Also ist $j(\alpha) = \alpha$.

$\Longrightarrow$ L1 $\quad j \upharpoonright V_\kappa = \mathrm{id} \upharpoonright V_\kappa$.

Lemma 2 $\quad j(\kappa) > \kappa.$

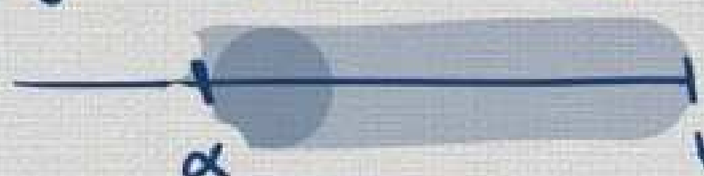
Beweis. $\quad j(\kappa) = [c_\kappa]$

$\alpha < \kappa \quad \underset{\alpha\ [L1]}{\underset{\shortparallel}{[c_\alpha]}} < [id] < [c_\kappa] = j(\kappa)$

(*) $\quad [c_\alpha] < [id]$

$\underset{Łoś}{\iff} \{\gamma < \kappa;\ c_\alpha(\gamma) < id(\gamma)\}$

$= \{\gamma < \kappa;\ \alpha < \gamma\} \in U$



Da U κ-vollständig und frei war, ist

$\{\beta\} \notin U$ und somit

$\bigcup_{\beta \le \alpha} \{\beta\} = \{\gamma < \kappa;\ \gamma \le \alpha\} \notin U$

$\underset{Ultra}{\Longrightarrow} \{\gamma < \kappa;\ \alpha < \gamma\} \in U.$

(*) $\quad [id] < [c_\kappa]$

$\underset{Łoś}{\iff} \{\gamma < \kappa;\ id(\gamma) < c_\kappa(\gamma)\}$

$= \{\gamma < \kappa;\ \gamma < \kappa\} = \kappa \in U.$

q.e.d.

Betrachten wir kurz einige Objekte zwischen κ und $j(\kappa)$:

(a) Wissen wir, ob $[\mathrm{id}]$ eine Kardinalzahl ist?

Nach Łoś:

GDW $\{\gamma < \kappa;\ \mathrm{id}(\gamma) \text{ ist Kard.}\} \in U$

$= \{\gamma < \kappa;\ \gamma \text{ ist Kard.}\}$

[Nicht ganz klar, ob dies von der Wahl von U abhängt.]

(b) <u>Aber</u>

$$\begin{aligned} b:\ \kappa &\longrightarrow \kappa \\ \alpha &\longmapsto |\alpha| < \kappa \end{aligned}$$

Da κ Limeskardinalzahl ist, ist

$$\kappa \leq [b] < j(\kappa)$$

$\{\gamma < \kappa;\ b(\gamma) \text{ ist Kardinalzahl}\} = \kappa \in U.$

Also ist $[b]$ eine Kardinalzahl in $\mathcal{M}$.

(c)
$$\begin{aligned} b^+ :\ \kappa &\longrightarrow \kappa \\ \alpha &\longmapsto |\alpha|^+ < \kappa \end{aligned}$$

Wiederum gilt $[b^+]$ ist eine Kardinalzahl.

$[b] < [b^+]$, da $\{\gamma < \kappa;\ |\gamma| < |\gamma|^+\} = \kappa \in U$.

Mehr noch:

$$\{\gamma < \kappa;\ b^+(\gamma) \text{ ist der kardinale Nachfolger von } b(\gamma)\} = \kappa \in U$$

$$\underset{\text{Łoś}}{\Longrightarrow} \quad [b^+] = [b]^+ \text{ in } \mathcal{M}.$$

(d) Genauso

$$b^{++}(\alpha) := |\alpha|^{++}$$

$$b^{+++}(\alpha) := |\alpha|^{+++}$$

gibt uns den Doppelnachfolger in $\mathcal{M}$

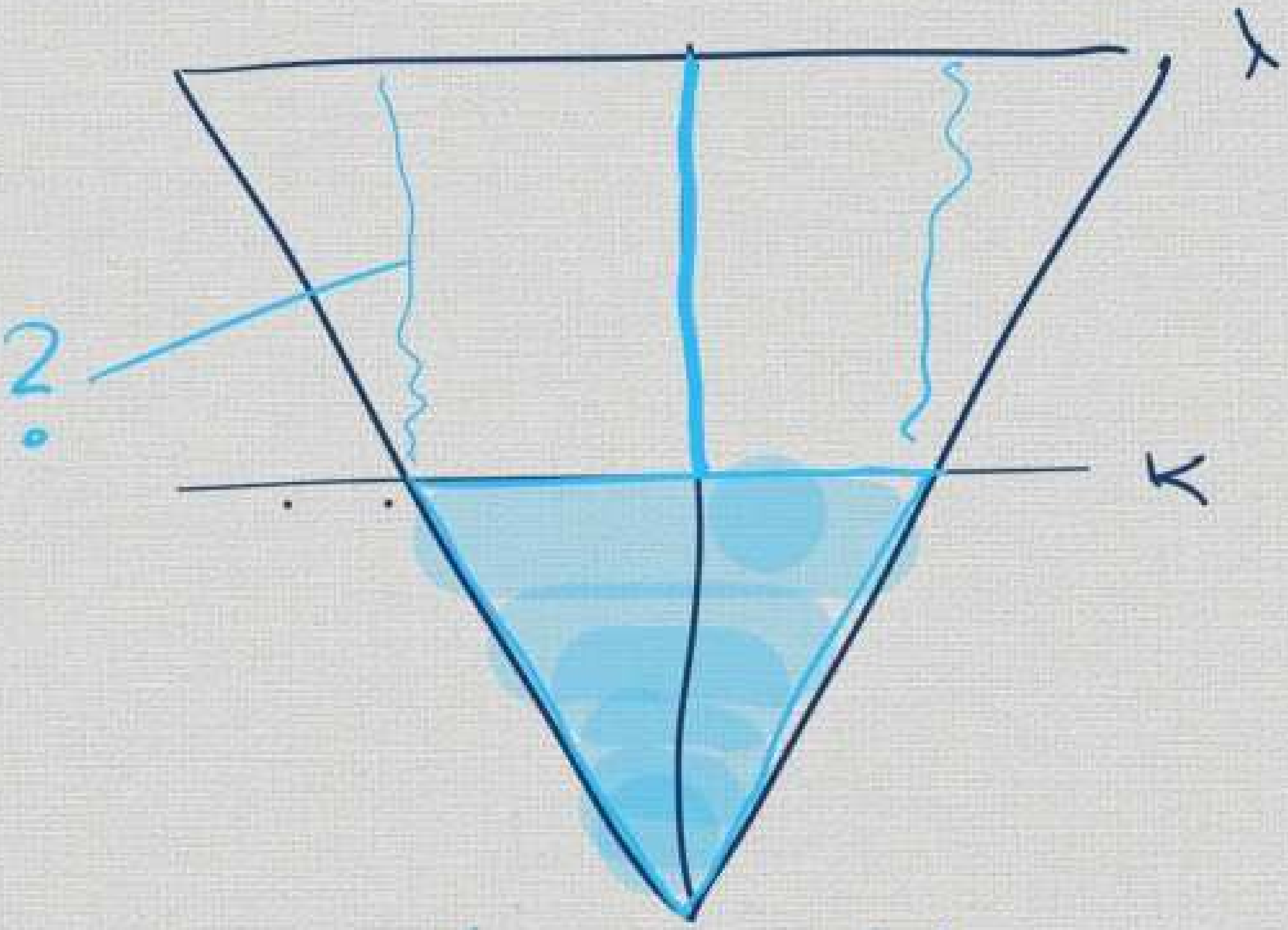
gibt uns den Dreifachnachfolger in $\mathcal{M}$.

Sind wir überrascht, daß es zwischen κ und $j(\kappa)$ so viele Kardinalzahlen in $\mathcal{M}$ gibt?

$\mathcal{V} \models \kappa$ ist meßbar

$\Longrightarrow \mathcal{M} \models j(\kappa)$ ist meßbar

D.h. in $\mathcal{M}$ haben wir sehr viele Kard. zwischen κ & $j(\kappa)$.



Lemma 3 $V_{\kappa+1} \subseteq M$.

Beweis $V_\kappa \subseteq M$ nach L1
Daher (da $M \models ZFC$) ist $V_\kappa \in M$.
[Bemerkung: Achtung, es gilt **NICHT** $j \restriction V_{\kappa+1} = id$! offensichtlich nach L2, da $\kappa \in V_{\kappa+1}$ und $j(\kappa) \neq \kappa$.]

Beh. Falls $X \subseteq V_\kappa$, so ist

$$X = j(X) \cap V_\kappa.$$

[Ang. $x \in X \Longrightarrow x \in V_\kappa$ nach Ann.
Aber $x = j(x) \in j(X) \Longrightarrow x \in j(X)$.
Zusammen: $\subseteq$.

$\forall X \subseteq V_\kappa \quad X = j(X) \cap V_\kappa$

$\subseteq$ bereits gezeigt.

Ang. $x \in j(X) \cap V_\kappa$.

Da $x \in V_\kappa$, gilt nach L1 $j(x) = x$.

$x = j(x) \in j(X)$

$\overset{\text{Elem.}}{\Longrightarrow} x \in X$.]

Beweis von L3 Sei $X \in V_{\kappa+1}$.

D.h. $X \subseteq V_\kappa$, also $X = j(\underbrace{X}_{\in M}) \cap \underbrace{V_\kappa}_{\in M}$.

$\Longrightarrow X \in M$.

q.e.d.

KOROLLARE

① κ ist eine Kardinalzahl in $\mathcal{M}$. Modelltheo.]
[offensichtlich aus den Vorüberlegungen zu inn.

② κ ist eine stark unerreichbare Kardinalzahl in $\mathcal{M}$.

[Ebenso.]

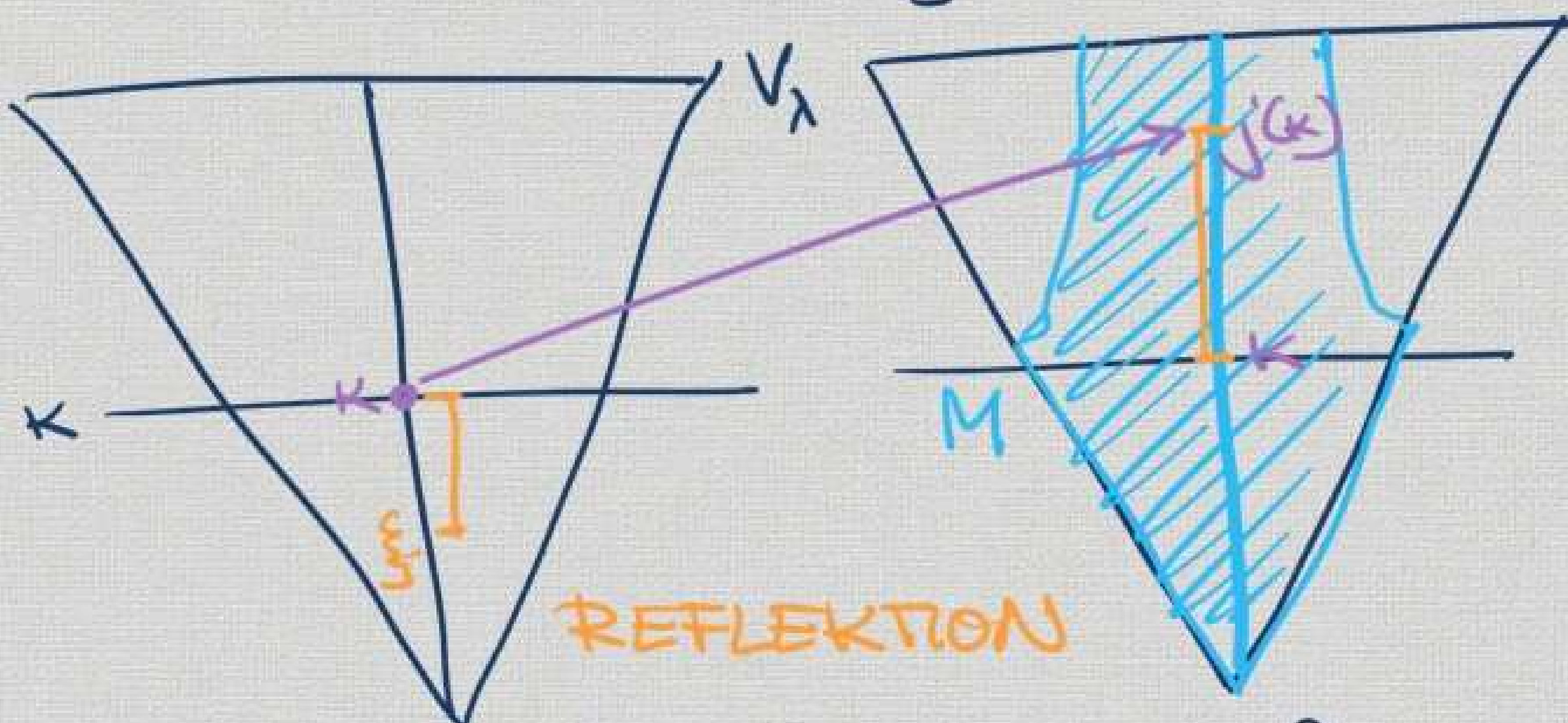
Man beachte:

$\mathfrak{M} \models j(\kappa)$ ist eine meßbare Kardinalzahl und es ex. $\xi < j(\kappa)$ mit ξ ist stark unerreichbar.

κ

$\Longrightarrow$ $\mathcal{V} \models \kappa$ ist meßbare Kardinalzahl und es ex. $\xi < \kappa$ mit ξ ist stark unerreichbar.

Elem.



<u>THEOREM</u> Falls λ unerreichbar, κ meßbar, $\kappa < \lambda$, so existiert ein $\xi < \kappa$ unerreichbar. Insbesondere kann κ nicht die kleinste unerreichbare Kardinalzahl sein.

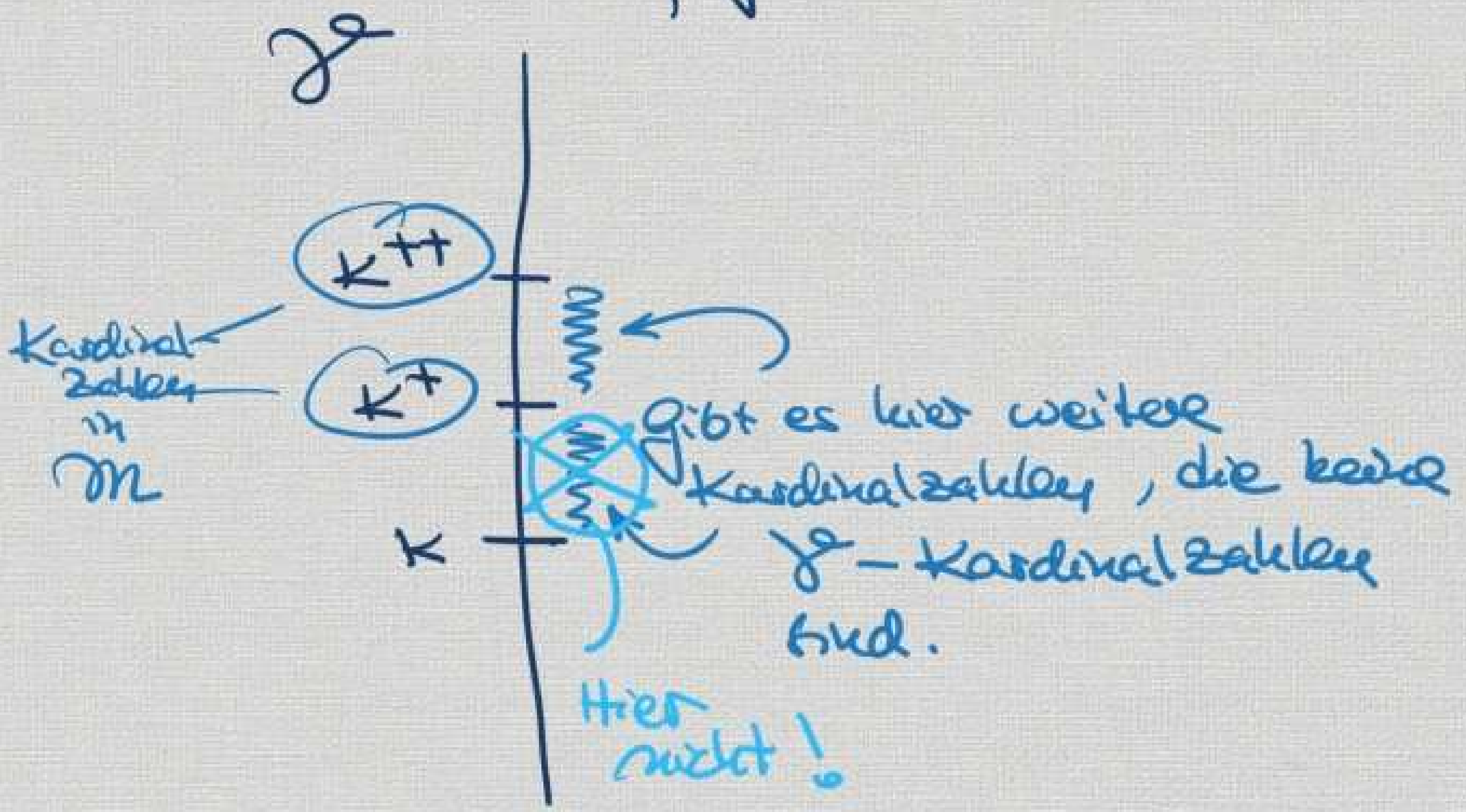
Korollar Wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, so ex. unerreichbare Kardinalzahlen, die nicht meßbar sind.

FORTSETZUNG Korollar

③ $\mathcal{P}(\kappa) \in M$

[Da jedes $X \subseteq \kappa$ ein Element von $V_{\kappa+1}$ ist, somit nach L3 in M.]

④ Was wissen wir über den Kardinalzahlnachfolger von κ in $\mathcal{M}$?



Falls $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$, so ist α in $\mathcal{V}$ eine Wohlordnung der Kard. κ. D.h. es ex. ein

$$R \subseteq \kappa \times \kappa \text{ mit}$$

$$(\alpha, \in) \cong (\kappa, R)$$

[Satz von Hartogs: $\kappa^+ = \aleph(\kappa)$.]

Aber $R \subseteq V_\kappa$, also $R \in V_{\kappa+1}$.

D.h. $R \in M$.

D.h. $\mathfrak{M} \models \exists f : \kappa \longrightarrow \alpha$ Bijektion

$\Longrightarrow \mathfrak{M} \models \alpha$ ist keine Kardinalzahl.

<u>Zusammenfassend</u>: κ^+ ist in $\mathfrak{M}$ die kleinste Kardinalzahl $> \kappa$.

<u>Bem.</u> (GA#11) Sie werden sehen, daß $j(\kappa)$ <u>in $\mathcal{V}$</u> gar nicht sehr groß sein kann: 2^κ ist eine obere Schranke.
D.h. $\mathfrak{M}$ und $\mathcal{V}$ sind sich nicht über Eig. von $j(\kappa)$ einig.

Theorem (Satz von Scott)

Eine meßbare Kardinalzahl kann nicht das kleinste Gegenbeispiel zu GCH sein.

M.a.W. falls κ meßbar und

$$\forall \mu < \kappa \quad 2^\mu = \mu^+$$

so gilt $2^\kappa = \kappa^+$.

Beweis $V \models \forall \mu < \kappa \ 2^\mu = \mu^+$

$$\xRightarrow{\text{Elem}} M \models \forall \mu < j(\kappa) \ 2^\mu = \mu^+.$$

Insbesondere ist $\boxed{M \models 2^\kappa = \kappa^+}$

In (3) hatten wir gesehen, daß $\mathcal{P}(\kappa) \in M$

In (4) hatten wir gesehen $M \models \nu = \kappa^+$

$$\Longrightarrow \nu = \kappa^+$$

$M \models$ es ex. Bijektion zw. X und Y wobei $X = \mathcal{P}(\kappa)$ und $Y = \kappa^+$

Diese Bij. ex. auch in V und da X wirklich $\mathcal{P}(\kappa)$ ist und Y wirklich κ^+ ist, erhalten wir $V \models 2^\kappa = \kappa^+$. qed.