MODELLE DER MENGENLEHRE

VORLESUNG X

WS 2020/21
19. Januar 2021

§11 ANWENDUNGEN VON ULTRAPOTENZEN IN DER MENGENLEHRE

κ stark unerreichbar $\mathcal{V} = (V_\kappa, \in) \models ZFC$

I Indexmenge $\underset{|I|<\kappa}{I \in V_\kappa}$, U Ultrafilter auf I

$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models ZFC$ [nach Łoś]

[Anm. In GA#9 hatten wir gesehen, daß $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$ i.a. nicht fundiert ist.]

Falls $[f] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$

$$f : \underset{\underset{\in V_\kappa}{\uparrow}}{I} \longrightarrow V_\kappa \implies f \in V_\kappa$$

D.h. die Elemente der Ultrapotenz sind repräsentiert durch Elemente von V_κ.

Falls $[f]$ eine Ordinalzahl in $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$, so muß $\{i \in I ; f(i) \text{ ist Ord.}\} \in U$

OBdA $f : I \longrightarrow \kappa$

κ: $\mathrm{Ord} \cap V_\kappa$.

Falls α eine definierbare Ordinalzahl ist, d.h. es ex. Φ mit

$$\mathcal{V} \models \Phi(x) \iff x = \alpha$$

[Beispiele: $\alpha = n \in \mathbb{N}$
$\alpha = \omega$
$\alpha = \omega + \omega$
$\alpha = \omega^2$]

dann gilt:

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models \Phi([c_\alpha])$$

$\iff \{i \in I;\ \Phi(c_\alpha(i))\} \in U$ ✓

$\iff I \in U.$

Also repräsentiert c_α diese definierbare Ordinalzahl.

Insbesondere: $c_\omega : I \longrightarrow V_\kappa$

$c_\omega(i) = \omega$

c_ω repräsentiert ω in $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$.

FRAGE VON HERRN SEIFERT. $I = \mathbb{N}$, U ist ein Ultrafilter, der den Fréchetfilter erweitert

$$[c_0] \in [c_1] \in [c_2] \in \ldots \in \boxed{[\mathrm{id}]} \in [c_\omega]$$

$[c_n] \in [\mathrm{id}]$

$\iff \{i \in I;\ c_n(i) \in \mathrm{id}(i)\}$

$= \{i \in I;\ n \in i\} = \{i;\ i > n\} \in U$

$[\mathrm{id}] \in [c_\omega]$

$\iff \{i \in I;\ i \in \omega\} = \mathbb{N} = I \in U.$

Frage. Wie kann es sein, daß c_n die Zahl $n \in \mathbb{N}$ repräsentiert und c_ω die Ord.z. ω repräsentiert, aber Ordinalzahlen dazwischen liegen?

Antwort: $\mathcal{Ult}(\gamma, U)$ ist nicht fundiert, das heißt: Objekte, die die Ultrapotenz für Ordinalzahlen hält, müssten keine sein.

EXKURS (Logik)

SATZ Falls $T \supseteq FST$, so daß T ein Modell hat, so hat T ein nichtfundiertes Modell.

Beweis Bem. Jedes Modell von FST enthält Objekte die den einzelnen natürlichen Zahlen entsprechen: $x_n \longrightarrow x_n \in x_{n+1}$

D.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine absteigende Kette der Länge k:

$$\underbrace{x_0 \in x_1 \in \ldots \in x_k}$$

Anwendung von Kompaktheit:

Füge neue Konstantensymbole c_n hinzu.

Betrachte

$\wedge$ "c_n ist Ordinalzahl".

$$T^* := T \cup \{ c_{n+1} \in c_n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$$

Jedes Modell von T^* ist ein nichtfundiertes Modell von T.

Um zu zeigen, daß T^* erfüllbar ist, müssen wir nur zeigen, daß T^* endlich erfüllbar ist.

$T_0^* \subseteq T^*$ endlich

$$T_0^* \subseteq T \cup \{ \underbrace{c_{k+1} \in c_k, \dots, c_1 \in c_0} \}$$

Interpretiere c_ℓ durch $x_{k+1-\ell}$.

Dann ist ein Modell von T mit dieser Belegung der $c_0, \dots, c_{k+1}$ ein Modell von T_0^*. Kompaktheit liefert ein Modell von T^*.

q.e.d.

Bem. Diese Modelle haben absteigende Ketten von Ordinalzahlen!

[Füge hinzu: "c_n ist Ordinalzahl"]

Was heißt es eigentlich, in $\mathrm{Ult}(\gamma, U)$ ω zu repräsentieren? z.B.

$$\Phi(x) = \left[\begin{array}{l} x \text{ ist Ordinalzahl } \wedge \\ x \neq \emptyset \;\; \wedge \\ x \text{ ist kein Nachfolger } \wedge \\ \forall y \, (y \in x \longrightarrow y = \emptyset \; \vee \\ \qquad\qquad y \text{ ist Nachfolger}) \end{array}\right.$$

Es gilt

$$\mathrm{Ult}(\gamma, U) \models \Phi([c_\omega]).$$

Also muß es für die Zahlen zwischen $[c_n]$ und $[c_\omega]$ Vorgänger geben!

GA#9 $\quad i_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } k \geq n \\ n-k & \text{sonst} \end{cases}$$

$[i_{k+1}]$ ist der Vorgänger von $[i_k]$

$\Longleftrightarrow \{n \in I ; \; i_{k+1}(n) + 1 = i_k(n)\} \in U$

Bemerkung Dies ist eng verbunden mit sogenannte Nichtstandardmodellen der Arithmetik

$$(M,<,+,\cdot) \equiv (\mathbb{N},<,+,\cdot)$$

Falls M "unendlich große Zahlen" hat, so müssen nach den Peanoaxiomen alle Vorgänger haben.

[Archimedische Klassen]

Zurück zur Mengenlehre

Theorem Falls I eine Indexmenge ist und U ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter auf I ist, so ist $\mathrm{Ult}(V,U)$ fundiert.

Beweis Kontrapositiv:
Falls $\mathrm{Ult}(V,U)$ nicht fundiert, so ist U nicht $\aleph_1$-vollständig.

Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, die den Fréchetfilter fortsetzen, können nicht $\aleph_1$-vollständig sein:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{i\in\mathbb{N};\, n>i\} = \emptyset$$

Sei $\mathfrak{A}t(\gamma, U)$ nicht fundiert mit

$\mathfrak{A}t(\gamma, U) \models [f_{n+1}] \in [f_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\underset{\text{Łoś}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{\{ i \in I ;\ f_{n+1}(i) \in f_n(i) \}}_{\overset{!!}{X_n}} \in U$

Ang. U sei $\aleph_1$-vollständig, so ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \in U. \Longrightarrow \bigcap X_n \neq \emptyset$$

$$\overset{\shortparallel}{\{ i \in I ;\ \underline{\forall n\ f_{n+1}(i) \in f_n(i)} \}}$$

Sei nun $i_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Also $\forall n \quad f_{n+1}(i_0) \in f_n(i_0)$

Aber dies wär in V_κ, welches fundiert ist. Widerspruch!

q.e.d.

Fundierungsaxiom

$\Longleftrightarrow$

$\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$

Bem. Falls U $\aleph_1$-vollständig ist, haben wir also keine absteigenden Ketten in $\mathrm{Ult}(\mathcal{F},U)$: wenn Sie sich $[f]$ ansehen, so daß $\mathrm{Ult}(\mathcal{F},U) \models [f]$ Ordinalzahl

dann ist

$$\{[g] \,;\, \mathrm{Ult}(\mathcal{F},U) \models [g] \in [f]\}$$

eine Wohlordnung und somit nach dem Repräsentationssatz eindeutig isomorph zu einer Ordinalzahl.

Theorem (Mostowski-Kollaps)

Sei M eine Menge und $E \subseteq M \times M$ mit

(i) E ist fundiert

(ii) E ist extensional, d.h.

$$(M,E) \models \text{Extensionalität}$$

Dann existiert eine transitive Menge T mit $(T,\in) \cong (M,E)$.

Sowohl diese Struktur als auch der Isomorphismus werden als MOSTOWSKI-Kollaps bezeichnet.

Beweis Das ist im wesentlichen der Beweis des Repräsentationssatzes für Wohlordnungen

Rekursion über die fundierte Struktur (M, E).

Angenommen G sei eine funktionale Formel. Dann definiert

$$m \in M \qquad F(m) = G(F \restriction E[m])$$

eine eindeutig bestimmte Fkt. auf M.
[Der übliche Beweis des Rekursionssatzes unter Verwendung des Ersetzungsaxioms.]

$$F(m) := \{ F(m') ; m' E m \}$$

[z.B. das minimale Elt von (M, E) wird durch F auf $\emptyset$ geschickt.]

F liefert eine Funktion mit

$$\mathrm{dom}(F) = M \qquad \mathrm{ran}(F) =: T$$

z.z. (1) T ist transitiv.

$x \in y \in T \Rightarrow y = F(m)$ für $m \in M$

$\Rightarrow \exists m'$ mit $m' E m$

und $x = F(m') \Rightarrow x \in T$.

$$\boxed{F(m) = \{F(m');\ m' E m\}}$$

(2) F ist strukturerhaltend:

$m' E m \iff F(m') \in F(m)$

Trivial nach Konstruktion.

(3) F ist surjektiv nach T

[da $T = \mathrm{ran}(F)$].

(4) F ist injektiv.

Ang. nicht. Sei m ein minimales Element, so daß ein $\overline{m}$ existiert mit

(*) $F(m) = F(\overline{m})$.

Insbesondere: falls $m' E m$, so gilt

$F(m') = F(\overline{m'}) \Rightarrow m' = \overline{m'}$.

(*) $\Rightarrow \{F(m');\ m' E m\} = \{F(\overline{m'});\ \overline{m'} E \overline{m}\}$

D.h. $\{x;\ x E m\} = \{x;\ x E \overline{m}\}$

Extensionalität von E impliziert $m = \overline{m}$.

q.e.d.

Folgerung Falls U $\aleph_1$-vollständig ist, so ist $\mathrm{Ult}(V,U) \cong (T,\in)$ mit T transitiv.

Wir können uns fragen: welche Funktionen in $\mathrm{Ult}(V,U)$ repräsentieren welche Mengen in T.

Einige Eigenschaften von transitiven Modellen von ZFC

Sei $(T,\in) \models ZFC$ mit T transitiv.

(1) In $(T,\in)$ gibt es die von Neumann-Ränge V_α. Setze für $\alpha \in T$

$$V_\alpha^T := X \quad \text{falls } (T,\in) \models X = V_\alpha$$

Dann gilt: $V_\alpha^T = V_\alpha \cap T$.

[Beweis. Ang. nicht. Sei α kleinstes Gegenbeispiel. Also $\forall \beta < \alpha \; V_\beta^T = V_\beta \cap T$. $(*)$

Sei $Z \in (T \cap V_\alpha) \setminus V_\alpha^T$.

Falls $x \in Z$, so gilt $x \in T \cap V_\beta \overset{(*)}{\Longrightarrow} x \in V_\beta^T$

Trans von T $(*)$

ZFC $\vdash$ $(*)$

$x \in V_\alpha \longleftrightarrow \forall y \, (y \in x \rightarrow \exists \beta < \alpha \, (y \in V_\beta))$

Also gilt

$$(T,\in) \models \forall x \, (x \in Z \longrightarrow \exists \beta < \alpha \; x \in V_\beta)$$

$$\overset{ZFC}{\Longrightarrow} (T,\in) \models Z \in V_\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad Z \in V_\alpha^T.$$ Widerspruch zur Annahme.]

(2) $\rho(x) = \alpha \iff (T,\in) \models \rho(x) = \alpha$ für $x, \alpha \in T$

[Folgt direkt aus (1).]

(3) Falls $x \in T$, so $\rho(x) \in T$.

[$ZFC \vdash \forall x \, \exists \alpha \; \rho(x) = \alpha$

Also hat x einen Minimumsanfang in T und nach (2) stimmt dieser mit dem echten überein.]

(4) Falls alle Elemente von T weniger als κ Elemente haben, so ist $T \subseteq V_\kappa$.

[Ang. $x \in T$ mit $\rho(x) \geq \kappa$; nach (3) ist dann $\kappa \in T$, aber dies widerspricht der Ann.]

Zurück zu $(T, \in) \cong \mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$.

Betrachte ich ein beliebiges $f : I \longrightarrow V_\kappa$

$I \in V_\kappa$

$[|I| < \kappa$, da κ unerreichbar$]$

Betrachte $R := \bigcup_{i \in I} f(i)$

Es gilt $\{f(i) ; i \in I\} \in V_\kappa$ und somit

$R \in V_\kappa$.

$|R| < \kappa$.

Falls also $[g] \in [f]$, so ist g OBdA eine Funktion von I nach R.

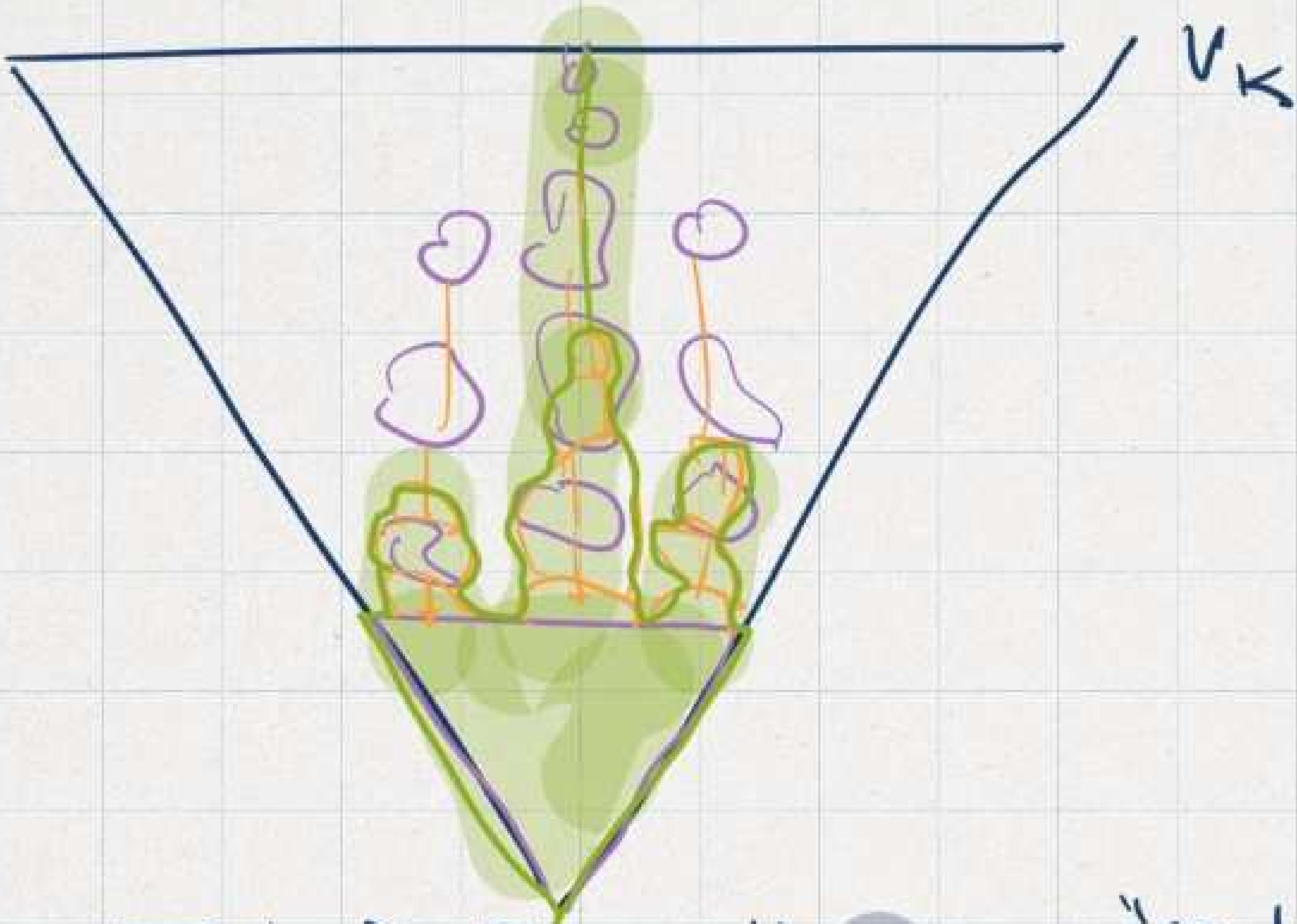
D.h. $[f]$ hat maximal $|R|^{|I|} < \kappa$

[da κ stark unerreichbar]

Elemente.

<u>KOROLLAR</u> Nach (4) ist also

$T \subseteq V_\kappa$.



Welche Fkt $f: I \longrightarrow V_\kappa$ repräsentiert
$\omega \in T$?

OBdA $\quad f: I \longrightarrow \omega+1$ (*)

Denn $\quad c_0 \; c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n \; \dots \; c_\omega$ sind alle Ordinalzahlen

$\Longrightarrow [c_\omega]$ ist mindestens ω

Jede Fkt $[g] \leq [c_\omega]$ ist OBdA von der Form (*)

Ang: $\underbrace{[c_n] < [g] < [c_\omega]}$ $\quad \{i \in I; g(i) < \omega\} \in U$

WIDERSPRUCH

$X_n := \{i \in I;\ n < g(i)\} \in U$

$\aleph_1$-vollst. $\longrightarrow \bigcap X_n \in U$

$\{i \in I;\ \forall n \ \ n < g(i)\} \in U \Rightarrow \{i; g(i) = \omega\} \in U$

Bem. Dieses Argument hatte nichts mit ω zu tun, sondern nutzt nur die Abzählbarkeit von ω:

d.h. falls $\alpha < \aleph_1$, so repräsentiert $[c_\alpha]$ gerade die Ordinalzahl α.

Was passiert bei $\aleph_1$?

Hätten wir einen freien $\aleph_1$-vollst. UF auf $\aleph_1$, so wäre

$$\underbrace{[c_\alpha] < [id] < [c_{\aleph_1}]}_{\alpha < \aleph_1}$$

Somit würde $c_{\aleph_1}$ nicht die Zahl $\aleph_1$ repräsentieren.

Aber (Herr Wanner): es ex. kein solcher UF: falls ein freier κ-vollst. UF auf κ ex., so ist κ stark unerreichbar.

MESSBARE KARDINALZAHL