Modelle der Mengenlehre

5. Januar 2021

VORLESUNG VIII

§9 WELTLICHE KARDINALZAHLEN & LÉVY-PAARE (Fortsetzung)

Wiederholung

Theorem (Zermelo).
Falls κ unerreichbar, so $V_\kappa \models ZFC$.

weltliche Kardinalzahl

Vorlesung VII:

(*) Falls κ unerreichbar, so ex. $\lambda < \kappa$ λ weltlich. Insbesondere sind die beiden Begriffe nicht äquivalent.

[Frage: Ist eigentlich klar, daß falls $V_\kappa \models ZFC$, dann κ eine Kardinalzahl sein muß.]

Lévy-Paar (λ, κ) mit
$$(V_\lambda, \in) \prec (V_\kappa, \in)$$

Theorem Falls κ unerreichbar, so ex. $\lambda < \kappa$ mit (λ, κ) Lévy-Paar.

Bemerkung. Dieser Beweis kann nicht funktionieren, falls κ nur weltlich und nicht unerreichbar ist.

Ansonsten gäbe es einen Widerspruch mit:

- κ die kleinste weltliche Zahl
- (λ,κ) Lévypaar & κ weltlich

$\Longrightarrow \lambda$ weltlich.

Wir betrachten die Konstruktion genauer, um zu verstehen, wo wir die Unerreichbarkeit verwenden.

Beispiel, wie es nicht klappt:

$$(V_{\aleph_1}, \in) \models Z$$

nicht Ersetzung

Wende darauf die Konstruktion wie im Beweis an:

$$\alpha_0 := 0$$

[κ regulär] $\alpha_{n+1} := \sup\{\rho(x);\ x$ ist ein Skolemzeuge für eine Formel mit Parametern in $V_{\alpha_n}\}$

cf $\aleph_1 > \aleph_0 \longrightarrow \lambda := \sup\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{N}\}$

Was ist α_1? Falls x ein Elt von $V_{\aleph_1}$ ist, welches parameterfrei definierbar ist, so ist $\rho(x) \le \alpha_1$.

Z.B. $\omega+\omega$ ist definiert durch die Formel $\Phi(x)$: =

x ist die kleinste Limesordinalzahl, die eine Limesordinalzahl als Elt enthält.

Insbesondere $\omega+\omega \leq \alpha_1$.

[Das gleiche Argument gibt $\omega^2 \leq \alpha_1$, $\omega^\omega \leq \alpha_1$ ...]

$\Longrightarrow V_{\omega+2} \subseteq V_{\alpha_1}$.

Also insbesondere: falls $R \subseteq \omega \times \omega$, so ist $R \in V_{\alpha_1}$.

z.B. Kode für eine abzählbare Ord.z.

dann gibt es eindeutiges β mit

$$(\beta, \in) \cong (\omega, R)$$

D.h. dass eine Ord.z. $\beta < \omega_1$ durch eine Formel Φ mit Parameter R in V_{α_1} definiert ist

$x = \beta \iff \beta$ ist die eind. best. Ord.z. mit $(\beta, \in) \cong (\omega, R)$

D.h. jedes $\beta < \omega_1$ ist ein Skolemzeuge für eine Formel mit Parametern in V_{α_1}.

$$\rho(\beta) = \beta$$

$$\alpha_2 = \sup\{\rho(x);\ \begin{array}{l} x \text{ ist Sk.z.f. Formel} \\ \text{mit Par. in } V_{\alpha_1} \end{array}\}$$

$$= \omega_1 .$$

Daher gibt uns der Beweis kein nicht-triviales Lévypaar.

<u>Vorlesung VIII</u>

Modelltheoretisches Argument:

$$\lambda < \mu \quad \left.\begin{array}{l} V_\lambda \prec V_\kappa \\ V_\mu \prec V_\kappa \end{array}\right\} \Longrightarrow V_\lambda \prec V_\mu$$

Falls κ die kleinste unerr., so erhalten wir ein Lévypaar (λ, μ), bei dem beide Zahlen nicht unerreichbar sind.

Gruppenarbeit #7

Hawkins' Argument, daß

$V_\kappa \prec V$

äquikonsistent zu ZFC ist.

Ziel. Satz von Lévy:

Charakterisierung von Unerreichbarkeit durch starke Lévy-Paare.

DEFINITION Sei κ eine Ordinalzahl, $R \subseteq V_\kappa$.

Dann heißt (λ, κ) ein R-starkes Lévypaar falls

(*) $$(V_\lambda, \in, R \cap V_\lambda) \prec (V_\kappa, \in, R)$$

[in der Sprache mit Symbolmenge $\{\in, \dot{R}\}$]

[Es ist nicht möglich ein Paar (λ, κ) zu haben, welches für alle R die Zeile (*) erfüllt. Man betrachte $R = \{\alpha\}$. Dann gilt $\alpha < \lambda$ $\Longrightarrow \lambda = \kappa$.]

Frage von Herrn Mucke:
Falls $V_\alpha \models ZFC$, ist dann immer α eine Kardinalzahl?

Antwort: Ja!

Wir beweisen dies:

Ang. α ist keine Kardinalzahl. Dann ex. $\kappa < \alpha$ mit $\alpha \sim \kappa$.

Man beachte: α ist Limesordinalzahl

$[ZFC \vdash \forall \gamma \text{ Ord. } \exists \delta > \gamma \text{ Ord.}]$

$\Longrightarrow \kappa + \omega \leq \alpha$.

Da $\alpha \sim \kappa$ ex. ein $R \subseteq \kappa \times \kappa$ mit

$$(\alpha, \in) \cong (\kappa, R)$$

Aber $R \in V_{\kappa+1} \subseteq V_\alpha$.

$\Longrightarrow (\kappa, R) \subseteq V_\alpha$.

ERSETZUNGS-AXIOM

In V_α gilt (ZFC) der Repräsentationssatz für Wohlordnungen: also ex. in V_α eine Ord. λ mit $(\lambda, \in) \cong (\kappa, R)$.

Aber dann ist $\underline{\alpha} = \lambda \in \underline{V_\alpha}$. $\lightning$.

Zurück zu den starken Lévypaaren:

Wir hatten beobachtet (VL $\underline{\text{VII}}$), daß falls κ unerreichbar, so existiert für jedes $R \subseteq V_\kappa$ ein R-starkes Lévypaar.

[Folgt direkt aus dem Beweis.]

<u>Theorem</u> (Satz von Lévy)

Äquivalent sind:

(i) κ ist unerreichbar

(ii) $\forall R \subseteq V_\kappa$ existiert ein R-starkes Lévypaar (λ, κ).

<u>Beweis</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist die obige Beobachtung.

Bleibt (ii) $\Rightarrow$ (i). Nehmen (ii) an und zeigen ① regulär

② starkes Limes

Beide Eigenschaften sind von der Form

$\exists \alpha < \kappa \ \exists F : X \longrightarrow \kappa$ unbeschränkt

Lemma Seien $X, Y \subseteq V_\kappa$. Sei $F: X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $\alpha := \rho(X)$.

Setze $R := F \cup \{\alpha\} \subseteq V_\kappa$.

Falls (λ, κ) ein R-starkes Lévypaar ist, so gilt $F \subseteq V_\lambda$.

[R ist eine kanonische Menge: disjunkte Vereinigung einer eindeutig bestimmten Ordinalzahl und von geordneten Paaren aus $X \times Y$.]

Beweis

$$(*) \quad (V_\lambda, \in, R \cap V_\lambda) \prec (V_\kappa, \in, R)$$

Nach Annahme:

$V_\kappa \models$ es ex. eine eind. best. Ordinalzahl in R

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} V_\lambda \models$ es ex. eine eind. best. Ordinalzahl in $R \cap V_\lambda$.

$\Longrightarrow \alpha \in R \cap V_\lambda \Longrightarrow \alpha \in V_\lambda$.

Da $\alpha \in V_\lambda$ und $\rho(X) = \alpha \Longrightarrow X \in V_\lambda$.

Ab sofort dürfen wir also X als Parameter verwenden.

$$V_\kappa \models \forall x \in X \, \exists y \; (x,y) \in R.$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} V_\lambda \models \forall x \in X \, \exists y \; (x,y) \in R \cap V_\lambda.$$

D.h. für jedes x liegt das eindeutig bestimmte (x,y) mit $(x,y) \in F$ bereits in V_λ.

$$\Longrightarrow F \subseteq V_\lambda.$$

q.e.d. (Lemma)

(1) Regularität

Ang. κ sei nicht regulär:

es ex. ein $\gamma < \kappa$ mit $F : \gamma \xrightarrow[\text{konfinal}]{} \kappa$.

Wende Lemma mit $X = \gamma$, $\alpha = \gamma$, $Y = \kappa$ an

Sei $R = F \cup \{\alpha\}$ und erhalte:

$$F \subseteq V_\lambda.$$

Aber F war konfinal, also für jedes $\delta < \kappa$ ex. ein $\eta < \gamma$ mit $F(\eta) > \delta$

$$\Longrightarrow \lambda \geq F(\eta) > \delta$$

$$\Longrightarrow \lambda = \kappa \text{ (da } \delta \text{ beliebig).}$$

② Starker Limes. Ang. nicht:
Es ex. $\gamma < \kappa$ mit
$G : \wp(\gamma) \longrightarrow \kappa$ surjektiv.
Wende Lemma an mit
$X = \wp(\gamma)$, $\alpha = \gamma + 1$, $Y = \kappa$
$R := G \cup \{\alpha\}$.
<u>Lemma</u>: $G \subseteq V_\lambda$.
Für alle $\delta < \kappa$ ex. ein $(x, \delta) \in G$
D.h. $(x, \delta) \in V_\lambda \Longrightarrow \delta < \lambda$.

Da δ beliebig war, ist $\lambda = \kappa$. q.e.d.

<u>Bemerkung</u>. Das erste Resultat in dieser Richtung heißt der <u>Satz von Shepherdson</u>
1950ger Jahre

κ ist unerreichbar
$\Longleftrightarrow$
V_κ ein Modell von zweitstufiger Mengenlehre ist

Manchmal auch "Zermelo-Shepherdson".

John Shepherdson 1926–2015

§ 10 Ultraprodukte

Sei I eine Indexmenge und S eine Symbolmenge und seien

$$\mathfrak{A}_i = (A_i, \ldots)$$

S-Strukturen für jedes $i \in I$.

Wir können ein Produkt definieren:

Sei $\prod_{i \in I} A_i$ die Menge der Auswahlfunktionen

$$v : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

mit $v(i) \in A_i$.

Wir definieren Interpretationen für Relations- und Funktionssymbole punktweise:

Sei f ein n-stelliges Funktionssymbol in S.

$$f(v_1, \ldots, v_n)(i) :=$$

$$f^{\mathfrak{A}_i}(\underbrace{v_1(i), \ldots, v_n(i)}_{A_i^n})$$

$$\quad A_i \qquad\qquad A_i$$

Im allgemeinen gilt nicht $\mathfrak{A}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{A}_2 \models \varphi$
$\Longrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \models \varphi$

Standardgegenbeispiel:

Körperaxiome.

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathbb{R}, +, \cdot; 0, 1)$$

$$\mathfrak{A}_2 = (\mathbb{R}, +, \cdot; 0, 1)$$

$$A_1 \times A_2 = \{ (x,y) ; \ x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$(x,y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

Dann ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kein Körper, da $(0,0)$ das neutrale Element der Addition ist,

aber $(0,1) \neq (0,0)$, aber $(0,1)$ ist nicht invertierbar:

$(1,1)$ ist das neutrale Element der Multiplikation

und $\forall x, y \quad (0,1) \cdot (x,y) = (0,y) \neq (1,1)$.

Nicht alle Formeln bleiben unter Produkten erhalten:

Gleichungen bleiben erhalten.

Universelle Abschlüsse von Gleichungen bleiben erhalten,

z. B. $\forall x \forall y \forall z \; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$\forall x \forall y \forall z \; x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Aber kompliziertere Formeln z. B. mit Existenzquantoren nicht unbedingt.

<u>Bemerkung</u> Man kann die Axiomensysteme, welche gleichungsdefiniert sind (Varietäten) durch Abschlußeigenschaften der Modellklasse charakterisieren. (Satz von Birkhoff).

<u>Stattdessen</u>: Können wir das Produkt durch Quotientenbildung so modifizieren, daß es Wahrheit von Sätzen erhält.

$\longrightarrow$ <u>Ultraprodukt</u>