MODELLE DER MENGENLEHRE
WS 2020/21
Vorlesung VII

15. Dezember 2020

"Eine Kardinalzahl ist GROSS wenn sie so groß ist, daß ihre Existenz nicht in ZFC bewiesen werden kann."

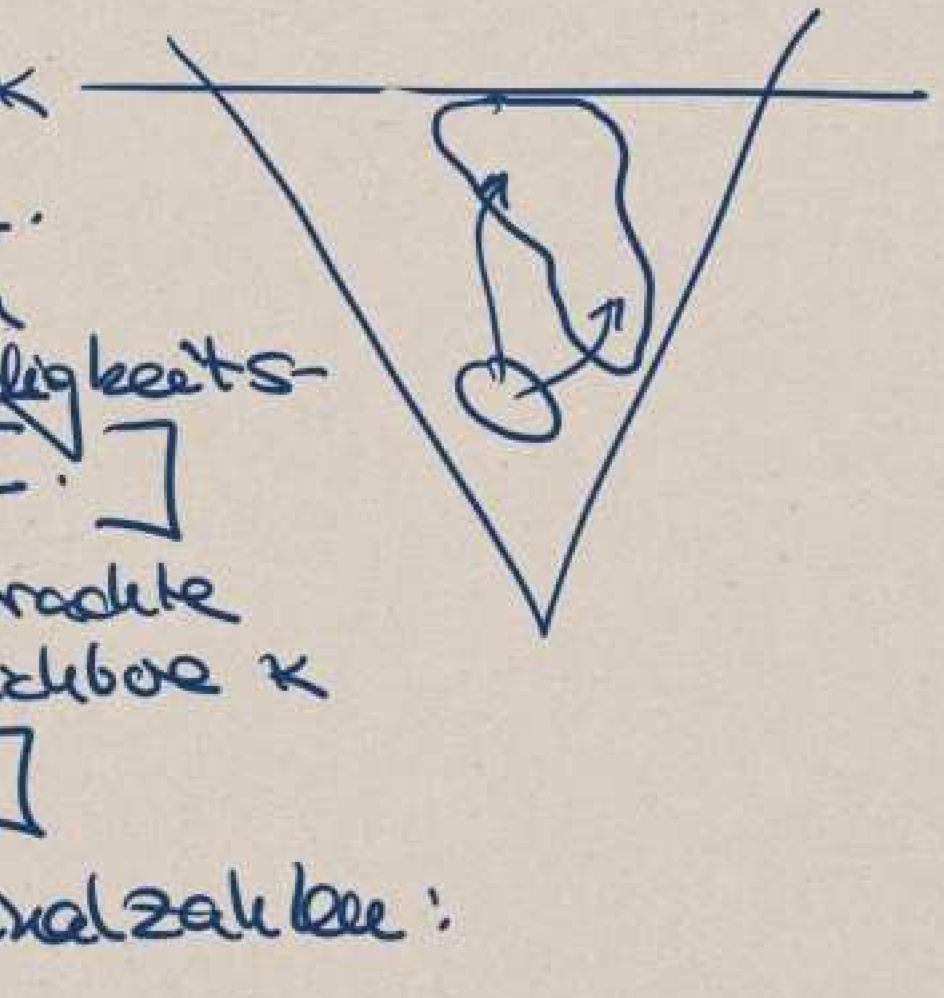
Große Kardinalzahl

UNERREICHBAR

THM κ ist stark unerreichbar

$\Longrightarrow V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

$\Longrightarrow$ κ ist "GROSS"



im informellen Sinne.

$\longrightarrow$ [Beweis 1. Über den Gödelschen Unvollständigkeitssatz; Vorlesung V.]

— [Beweis 2. Man betrachte die kleinste unerreichbare κ und $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.]

Andere große Kardinalzahlen:

MESSBARE KARD.

SCHWACH KOMPAKTE KARD.

[meßbar $\Longrightarrow$ unerreichbar

schwach kompakt $\Longrightarrow$ unerreichbar]

ZIEL für Vorlesung VII & VIII:

Vgl. zwischen Unerreichbarkeit und der Eigenschaft "$V_\kappa \models ZFC$".

DEFINITION Wir nennen κ WELTLICH falls $V_\kappa \models ZFC$.

Alle Argumente zur Nichtbeweisbarkeit des Axioms $IC = \exists\kappa(\kappa$ ist stark unerreichbar$)$ benutzen eigentlich nur

$$WC = \exists\kappa(\kappa \text{ ist weltlich}).$$

Also sind weltliche Kardinalzahlen in unserem informellen Sinne "groß".

Wir werden zeigen, daß

unerreichbar $\not\Leftrightarrow$ weltlich.

[ACHTUNG: Dies heißt nicht

$ZFC \vdash \exists\kappa(\kappa$ weltlich aber nicht unerreichbar$)$

sondern: falls es weltliche Kardinalzahlen gibt, so gibt es solche, die nicht unerreichbar sind.]

<u>Erinnerung</u> Tarski-Vaught-Test

[Vorlesung III]

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

$\pi: A \longrightarrow B$ Einbettung

Falls für alle $\varphi \in L^S$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt

$$\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, \pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$$

so gilt

$$\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$$

Dann ist π eine elementare Einbettung.

$$\pi: \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}.$$

Wir können oBdA annehmen, daß $A = \overset{\pi = id}{\pi[A]} \subseteq B$ und daß $\pi = id$. Wir schreiben dann

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$$

"$\mathfrak{A}$ ist elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$".

Damit: "κ unerreichbar $\Longrightarrow$ $\exists \lambda < \kappa$ weltlich nicht unerreichbar".

Wir wissen bereits:

κ unerreichbar, $\Longrightarrow V_\kappa \models ZFC$

$$\mathcal{H}^{V_\kappa}(\emptyset) \prec V_\kappa$$

abzählbar

$$\mathcal{H}^{V_\kappa}(\emptyset) \models ZFC.$$
$$\mathcal{H}^{V_\kappa}(\emptyset) \neq V_\kappa.$$

Dies reicht nicht, um eine weltliche Zahl zu erhalten.

<u>Proposition</u> Falls κ unerreichbar, dann ex. $\lambda < \kappa$ mit $cf(\lambda) = \aleph_0$, so daß λ weltlich ist.

Wir zeigen sogar $\boxed{V_\lambda \prec V_\kappa}$.

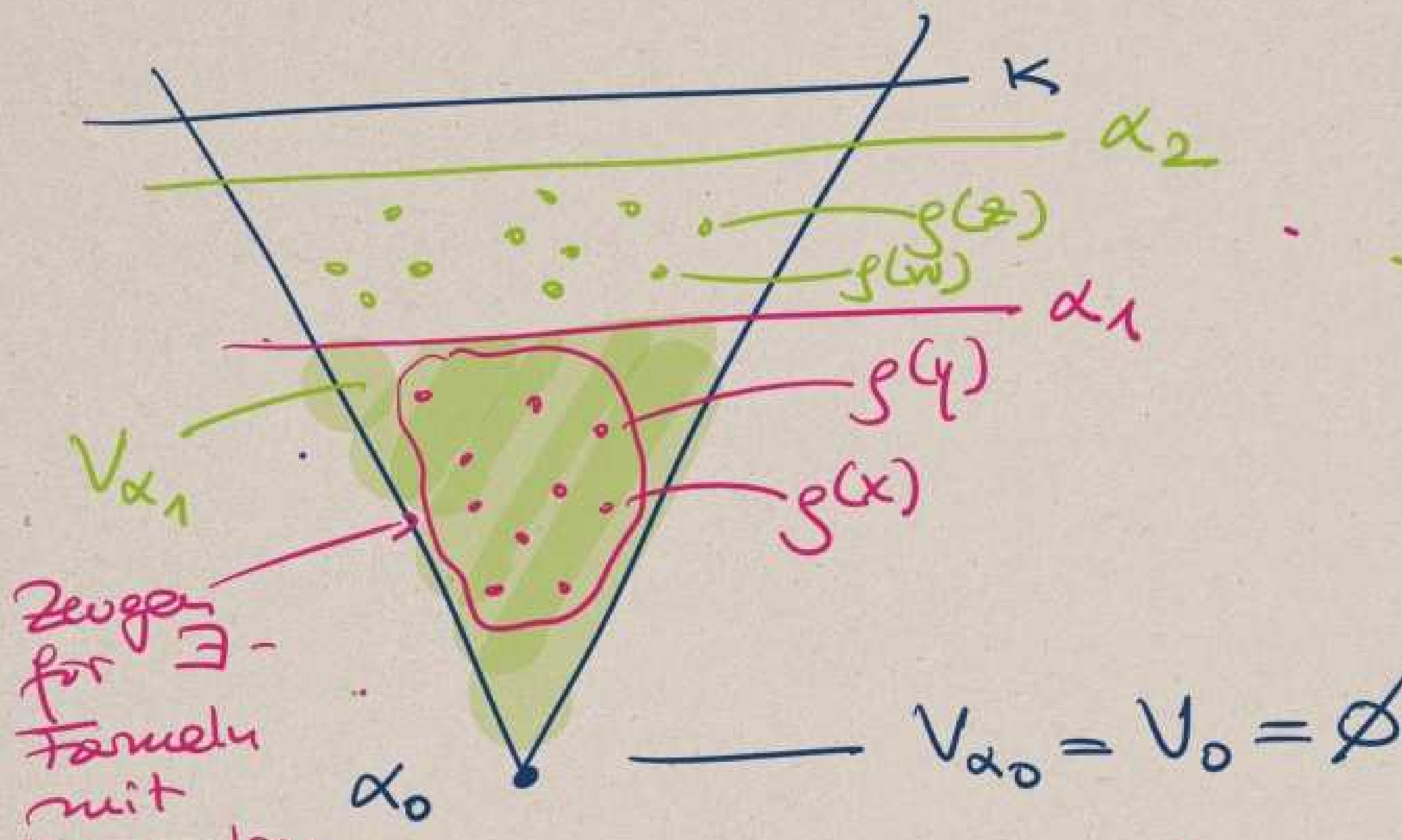
<u>Beweis</u> Modifikation des Skolemhüllenarguments aus VL $\underline{III}$.

Sei $f : L^S \times V_\kappa^{<\omega} \longrightarrow V_\kappa$ eine Skolemfunktion für V_κ.

Setze $\alpha_0 := 0$

Sei α_i bereits definiert. Definiere

α_{i+1} :



$R_0 = \{\rho(x)\,;\ x$ ist ein Zeuge$\}$
ist eine abzählbare Mengen

$\sup R_0 < \kappa$ [da κ regulär war]

Setze $\alpha_1 := \sup R_0$.

Betrachte nun alle Formeln mit Parametern in V_{α_1}. Wieviele Zeugen?

$\alpha_2 = \sup R_1$ $\quad \aleph_0 \cdot |V_{\alpha_1}|^{<\omega} < \kappa.$

Nach Lemma aus VL $\underline{V}$ gilt $|V_{\alpha_1}| < \kappa$

$R_1 = \{\rho(z)\,;\ z$ ist ein Zeuge$\}$ ist beschränkt in κ.

$\alpha_0 = 0$

$\alpha_{i+1} := \sup\{\rho(f(\varphi, a_1, \dots, a_n)) ;$

$\varphi \in L^S, a_1, \dots, a_n \in V_{\alpha_i}\}$

R_i

$|R_i| \le \aleph_0 \cdot |V_{\alpha_i}^{<\omega}| < \kappa .$

$\alpha_i < \kappa$ für alle i:

$\boxed{\lambda := \sup\{\alpha_i ; i \in \omega\}}$

$\mathrm{cf}(\lambda) = \aleph_0$

Zu zeigen bleibt. $V_\lambda \prec V_\kappa$.

Wir verwenden TVT. Die Identität ist eine Einbettung. Sei also nun

$V_\kappa \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ für $a_1, \dots, a_n \in V_\lambda$

Für jedes $1 \le i \le n$ finde j_i mit $a_i \in V_{\alpha_{j_i}}$; $N := \max\{j_1, \dots, j_n\}$

Dann ist $(a_1, \dots, a_n) \in V_{\alpha_N}^{<\omega}$.

Dann ist $f(\varphi, a_1, \dots, a_n)$ ein Zeuge.

und somit

$$f(\varphi, a_1, \dots, a_n) \in V_{\alpha_{N+1}}.$$

Also gilt, daß bereits V_λ einen Zeugen für $\exists x \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ hat.

q.e.d.

<u>Bem.</u> Da $\mathrm{cf}(\lambda) = \aleph_0$ ist λ nicht unerreichbar.

<u>Alternativ.</u> Falls κ die kleinste unerreichbare ist, so ist λ weltlich und kann nach dem gleichen Argument wie ZFC $\nvdash$ IC nicht unerreichbar sein.

<u>DEFINITION</u> Ein Paar (α, β) von Ordinalzahlen heißt <u>Lévy-Paar</u> falls

$$\underline{V_\alpha} \prec \underline{V_\beta}.$$

Zahlen in einem Lévy-Paar können nicht definierbar sein. Wir sagen α ist eine <u>untere Lévy-Zahl</u> und β ist eine <u>obere Lévy-Zahl</u> falls (α, β) ein Lévy-Paar ist.

Umformulierung der vorigen Proposition: Falls κ unerreichbar, so ex. $\lambda < \kappa$ so daß (λ, κ) ein Lévy-Paar ist.

<u>Beobachtung</u>
Falls (α, β) Lévy-Paar und β ist weltlich/unerreichbar, so ist α weltlich.

<u>Fragen</u> Falls (α, β) ein Lévy-Paar ist,

(a) muß β <u>unerreichbar</u> sein?
(b) müssen α, β weltlich sein?

[Vermutlich wird Frage (b) in der Gruppenarbeit #7 behandelt.]

<u>Erweiterte Proposition</u> Falls κ unerreichbar ist und $\alpha < \kappa$, so existiert λ mit

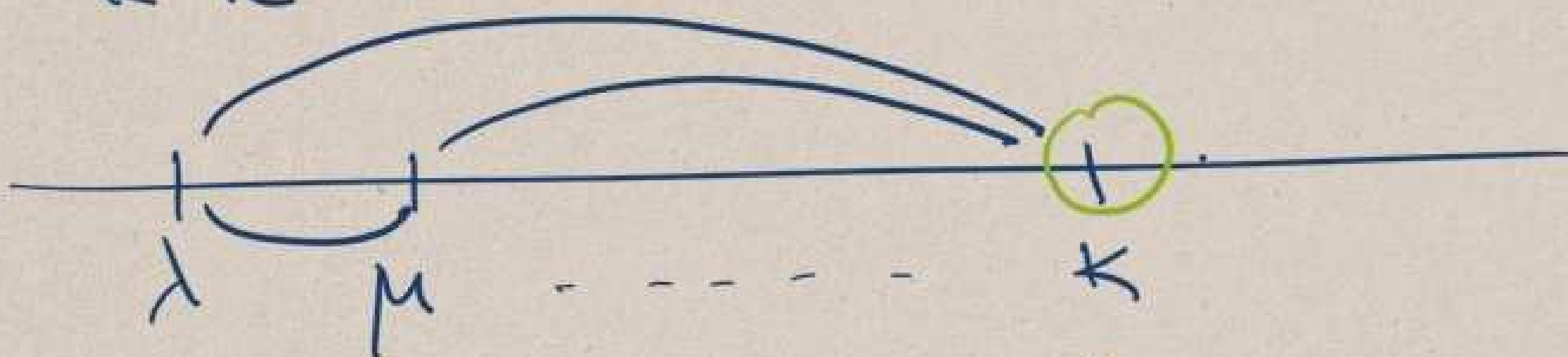
$$\alpha < \lambda < \kappa,$$

so daß $V_\lambda \prec V_\kappa$.

<u>Beweis</u>. Der gleiche, außer daß $\alpha_0 := \alpha + 1$. qed

Korollar Unter jeder unerreichbaren κ liegen κ viele $\left\{ \begin{array}{l} \text{untere Lévyzahlen} \\ \text{weltliche Zahlen.} \end{array} \right.$

Also ist die kleinste unerreichbare die κ-te weltliche Kardinalzahl.



so daß κ unerreichbar und

$\left.\begin{array}{l}(\lambda, \kappa) \\ (\mu, \kappa)\end{array}\right.$ beide Lévypaare sind.

Lemma Falls (α, γ) und (β, γ) mit $\alpha \leq \beta$ Lévypaare sind, so auch (α, β).

Beweis Zu zeigen $V_\alpha \prec V_\beta$.

Sei $V_\alpha \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} V_\gamma \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$

da $V_\alpha \subseteq V_\beta$: $a_1, \ldots, a_n \in V_\beta$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} V_\beta \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

q.e.d.

VORAUSSETZUNG

$V_\alpha \prec V_\gamma$ (*)

$V_\beta \prec V_\gamma$ (*)

Koroll. Falls κ unerreichbar ist, so ex. Lévypaare (α, β) mit α, β nicht unerreichbar.

Beweis Sei κ die kleinste unerr., seien $\alpha < \beta < \kappa$ Zahlen, so daß (α, κ) und (β, κ) Lévypaare sind. Nach Lemma (α, β) ein Lévypaar. q.e.d.

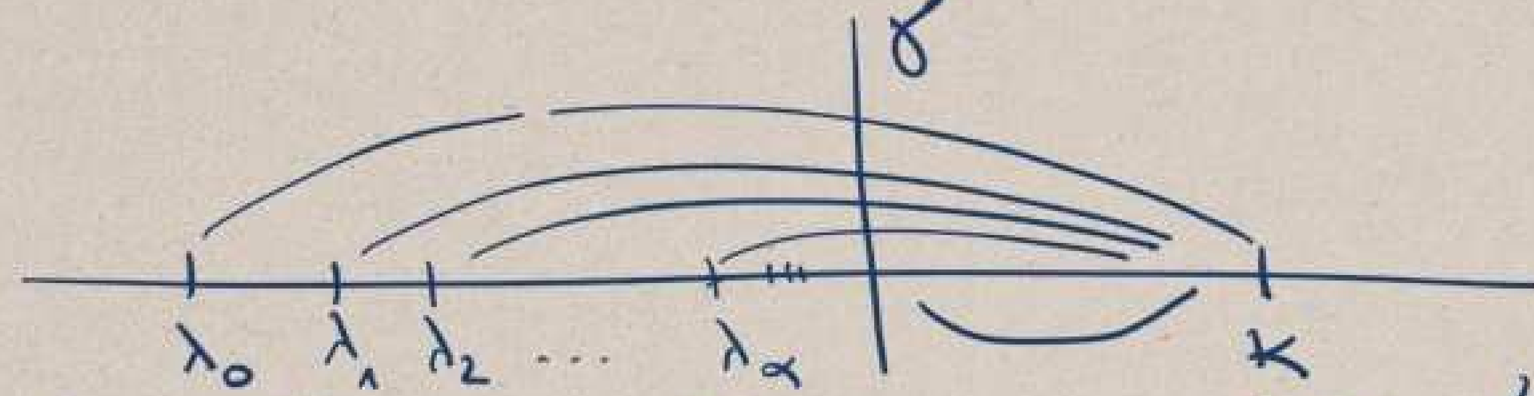
Dies beantwortet Frage (a) von Seite 8.

Bemerkung Alle unteren Lévyzahlen (= weltliche Zahlen), die wir hier konstruiert haben, verwenden den modifizierten Skolemhüllenbeweis und sind daher Suprema einer abzählbaren Folge $\{\alpha_i \mid i \in \omega\}$. Daher gilt

$$cf(\lambda) = \aleph_0$$

für alle konstruierten Zahlen.

Gibt es auch andere?



Sei C eine Menge von unteren Lévy-Zahlen zur oberen Zahl κ ohne größtes Element.

Was wissen wir über $\gamma = \sup C$?

<u>Lemma</u> Falls $\gamma < \kappa$ und die Menge

$$\{\alpha < \gamma \,;\, \underline{V_\alpha \prec V_\kappa}\}$$

ist unbeschränkt in γ, so gilt

$$V_\gamma \prec V_\kappa .$$

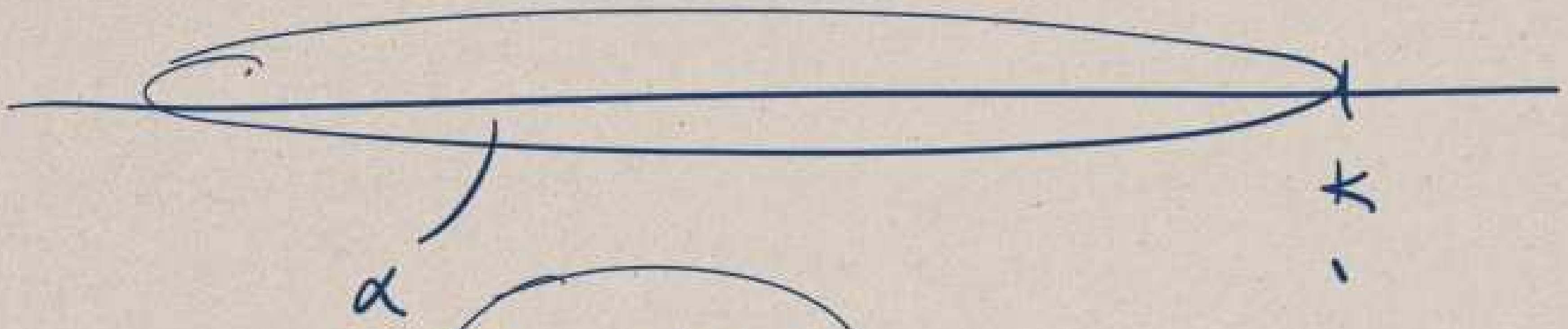
<u>Beweis</u> Wissen, daß $\mathrm{id} : V_\gamma \longrightarrow V_\kappa$ eine Einbettung ist und verwenden TVT.

$$\underline{V_\kappa \models \exists x \, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)} \qquad \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in V_\gamma$$

Finde $\alpha < \gamma$ mit $a_1, \dots, a_n \in V_\alpha$. Finde von $\alpha \leq \alpha'$ mit $V_{\alpha'} \prec V_\kappa$. Wegen Elementarität:

$$V_{\alpha'} \models \underline{\underline{\exists x}} \, \varphi(x, a_1, \dots, a_n).$$

Also ex. $a \in V_{\alpha'} \subseteq V_\gamma$. qed



mit $V_\alpha \prec V_\kappa$

Sei λ_γ für $\gamma < \kappa$ das γ-te Element dieser Menge.

Nach dem vorigen Lemma ist also das $\aleph_1$-te Element dieser Menge das Supremum der ersten $\aleph_1$-vielen Elemente dieser Menge.

Mit üblichen Argumenten erhalten wir, daß das $\aleph_1$-te Element dieser Menge Konfinalität $\aleph_1$ hat.

Ebenso: das $\aleph_k$-te Element hat Konfinalität $\aleph_k$. usw.

DEFINITION Sei $R \subseteq V_\kappa$. Wir nennen (λ, κ) ein **R-STARKES LÉVY-PAAR** falls

$$\underbrace{(V_\lambda, \in, R \cap V_\lambda)}_{S\text{-Struktur, wobei } S = \{\in, \dot{R}\}} \prec (V_\kappa, \in, R)$$

$\dot{R}$: 1-stelliges Relationssymbol

Beobachtung Der Beweis der Existenz von Lévypaaren (λ, κ) falls κ unerreichbar ist, gibt uns R-starke Lévypaare.

[Der Beweis des Theorems hat an keiner Stelle verwendet, daß wir $S = \{\in\}$ haben, sondern lediglich, daß $|L^S| = \aleph_0$ $(|L^S| < \kappa)$.
D.h. $S^* = \{\in, \dot{R}\}$ funktioniert der Beweis immer noch, wobei wir nun eine S^*-Skolemfunktion verwenden, statt einer S-Skolemfunktion.]

VL VIII: Satz von Lévy: Charakterisierung von Unerreichbarkeit mit starken LP.